Optimal kontrollteori

Diskontinuerlige differensiallikninger og diskontinuerlige integrander i kriteriene

Alan H. Tahir

Masteroppgave for mastergraden i samfunnsøkonomi

ved Økonomisk Institutt

UNIVERSITETET I OSLO

2. mai 2008

Forord

Denne masteroppgaven er en avsluttende oppgave for min mastergrad i samfunnsøkonomi ved Universitetet i Oslo. Hensikten med valg av tema er basert på min interesse for anvendelse av optimal kontrollteori på økonomiske systemer og å lære mer optimal kontrollteori.

Jeg vil takke min veileder, professor Atle Seierstad, som foreslo problemsstillingen. Hans faglige støtte har gitt meg nok kunnskap til å gjennomføre oppgaven. Jeg er meget takknemlig for at han har bidratt som veileder for denne oppgaven.

Eventuelle feil, mangler eller uklarheter er mitt hele og fulle ansvar.

Oslo, mai 2008
Alan H. Tahir

Sammendrag

Denne oppgaven tar for seg tre økonomiske modeller hvor underliggende systemer endrer karakter etter å ha krysset en grense for differensiallikningene og integranden i kriteriene. Grensen for systemene er definert slik at når tilstandsvariabelen krysser en gitt størrelse, endrer systemet karakter. På det tidspunktet tilstandsvariabelen krysser grensen kan den adjungerte funksjonen gjøre et sprang, men tilstandsvariabelen forblir kontinuerlig. Løsningsmetoden for kontrollproblemene tar utgangspunkt i et memorandum av Atle Seierstad og Sigve D. Stabrun, *Discontinous control systems*. Målsettingen med oppgaven er å anvende denne løsningsmetoden på kontrollproblemer, og å finne de optimale kontrollfunksjonene med systemer som endrer karakter for overskridelse av en grense.

Problemstillingen i oppgaven formuleres som følger:

I noen økonomiske modeller undersøke konsekvenser av diskontinuitet i differensiallikninger og integrander i kriteriene i kontrollproblemer.

I oljeutvinningsmodellen viser analysen to scenarioer, med og uten backstop teknologi. Med et endetidspunkt $T \leq \tau$ setter monopolisten en optimal pris bare med hensyn på tømt og utømt reservoar/oljefelt. Hvis monopolisten ønsker å ha en lenger planperiode, utvides modellen med backstop teknologi, med et krysningspunkt lik τ. Etter å ha krysset grensen for differensiallikningen og integranden i kriteriet endrer systemet karakter ved at en backstop teknologi kommer på banen. I alle tilfellene fant jeg mulige optimale kontroller som maksimerer kriteriet. Ved å bruke eksistensteoremet kunne jeg vise at ved en modifisering av kontrollregionen at alle kontrollene er optimale.

For prisutviklingen blir monopolistprisen med backstop teknologi lavere (eller lik) enn uten backstop teknologi. Dette vises analytisk i tilfellet med utømt oljefelt og $\bar{q} > p_x(t)$.

I vekstmodellene viser jeg optimale investeringsallokeringer i bestemte tidsintervaller på planperioden. Analysene i begge modellene betrakter jeg først i det kontinuerlige tilfellet (før sprangtidspunktet) og deretter i diskontuerlige tilfellet (med sprangtidspunktet). For alle mulige tidshorisonter på planperioden viser jeg forslag til optimale kontroller og deretter ved å bruke eksistensteoremet viser jeg at kontrollene er optimale.

Løsningene blir langt mer omfattende for diskontinuerlige kontrollproblemer. Spesielt var det utfordrende i kontrollproblemet hvor Hamiltonfunksjonen er konkav i x og u. Her får vi ikke nødvendigvis løst kontrollproblemet analytisk og må bruke numeriske metoder for å løse dette. Dette ble belyst i forsøket å løse kontrollproblemet i modell 3, der problemet oppstod å finne løsningen for τ, men her strakk ikke tidsbudsjettet til å finne en numerisk løsning. På sprangtidspunktet rammes den adjungerte funksjonen med et sprang. Diskontinuitet i denne funksjonen medførte at kontrollfunksjonene i kontrollproblemene i model 1 og 3 ble diskontinuerlige på sprangtidspunktet. Dette medfører at de optimale banene blir presset nedover og oppover i de respektive problemene.

I denne oppgaven har jeg ikke sett nærmere på stokastiske problemformuleringer. Stokastiske kontrollproblemer er svært kompliserte, og jeg håper jeg får muligheten til å benytte kontrollteori for stokastiske kontrollproblemer ved en senere anledning, som jeg ikke fikk plass til innenfor rammen av min masteroppgave.

Innhold

1 Innledning

I økonomiske modeller ønsker vi ofte å studere maksimumsverdier eller minimumsverdier av noen størrelser som eksplisitt avhenger av tidsutviklingen av en eller flere variable. Slike dynamiske optimeringsproblemer krever mer avansert matematisk verktøy enn statiske optimeringsproblemer med momentan tilpasning. Optimal kontrollteori er et slikt matematisk analyseverktøy som anvendes i generelle dynamiske optimeringsproblemer med kontinuerlig tidsutviklingen. Hovedresultatet i denne teorien er Pontryagin Maksimumsprinsipp som gir nødvendige betingelser for optimalitet i generelle dynamiske optimimeringsproblemer.

I disse dynamiske modeller er utviklingen styrt av differensiallikninger, som gir tilstandsvariabelens veksthastighet. Tilstandsvariable kan igjen styres av, på en eller annen måte, kontrollfunksjoner. Siden forskjellige kontrollfunksjoner kan gi forskjellige utviklingsbaner for tilstandsvariablene og dermed også for veksthastigheten, er optimeringsproblemet å finne de optimale kontrollfunksjonene som maksimerer eller minimerer kriteriet. Maksimumsprinsippet er et løsningsverktøy for slike kontrollproblemer. Det gir oss de nødvendige (men ikke de tilstrekkelige) betingelsene for å løse problemet. Ved en eller flere mulige løsninger, trenger vi også å sjekke problemet for tilstrekkelige betingelser for å komme frem til en optimal løsning.

Maksimumsprinsippet bygger på en viktig forutsetning om kontinuitet i systemet, det vil si at kriteriet, tilstandsvariable, differensiallikninger og adjungerte funksjoner er kontinuerlige over tidsintervallet.[1] I noen økonomiske modeller vil det være behov for å tillate plutselige sprang (eller sjokk) i systemet når det krysser en grense. Matematisk vil slike endringer introdusere diskontinuitet i differeniallikningene og/eller i kriteriet som opphever i forutsetningene for å kunne bruke standard maksimumsprinsipp.[2] I denne masteroppgaven vil jeg undersøke noen økonomiske modeller der systemet endrer karakter etter å ha krysset en grense for differensiallikningen og integranden i kriteriet. I alle modellene i oppgaven forutsettes tilstandsvariablene å være kontinuerlige over hele planperioden, men de adjungerte funksjonene, tilordede funksjoner til differensiallikningene, kan gjøre et sprang på det tidspunktet systemet endrer seg.

[1] kontrollfunksjonen antas av å være stykkevis kontinuerlig

[2] Seierstad og Stabrun (2007): *Discontinuous control systems*, memorandum fra økonomisk institutt ved Universitetet i Oslo

1.1 Bakgrunn og metodevalg

Optimering og kontroll av dynamiske systemer er sentrale problemer som økonomer er ofte opptatt av. I mange sammenhenger er slike problemer også preget av systemendringer på grunn av tidsutviklingen. Dette gjør at problemenes omfang blir større og mer kompliserte, men det medfører også at vi må bruke løsningsmetoder som tar for seg problemenes egenart mer hensiktmessig.

Motivasjonen for oppgaven har uten tvil vært interessen om å lære mer optimal kontrollteori. Et stort og moderne tema som dette har det også vært en utfordring for avgrensning for oppgaven. Et område som ikke har fått altfor mye oppmerksomhet i økonomiske litteratur ved anvendelse av optimal kontrollteori er når systemer har behov for plutselige sprang i planperioden. Hensikten med denne oppgaven er å undersøke noen økonomiske dynamiske modeller for slike sprangtidspunkter der systemene endrer karakter etter å ha krysset en grense for differensiallikninger og integranden i kriteriet. Som jeg vil vise av løsningene nedenfor, må økonomiske aktører som ønsker å maksimere profitt (eller nytten) må de ta hensyn til slike endringer i profittfunksjonen (eller i nyttefunksjonen). Løsningsverktøyet for de kontrollproblemene jeg skal undersøke tar utgangspunktet i et memorandum av Atle Seierstad og Sigve D. Stabrun, *Discontinous control systems*. Denne metoden tilføyer noen tilleggsbetingelser i tillegg til de nødvendige betingelser som standard maksimumsprinsipp gir for optimalitet.

I modellene ser jeg bort fra all usikkerhet og benytter en deterministisk kontrollteoretisk - analyse av problemene. En slik forutsetning er selvsagt en grov forenkling, men jeg tillater meg dette på grunn av analytisk gjennomførbarhet.

1.2 Oppgavens struktur

Oppgaven består av seks kapitler der innledningen utgjør det første. I kapittel to redegjør jeg for standardproblemet med Pontryagin maksimumsprinsipp. Videre vil jeg også redegjøre for problemet med diskontinuitet og de nødvendige betingelsene (tilleggsbetingelsene) for det. I kapittel tre undersøker jeg en oljeutvinningsmodell med og uten backstop teknologi. I kapittel fire og fem går jeg gjennom to vekstmodeller med forskjellige eksterne virkninger, hvor jeg gir løsninger med og uten sprang i planperioden. I avslutningskapittelet presenterer jeg en konklusjon av oppgaven.

2 Standardproblemet

For to faste verdier t_0 og t_1, består problemet å finne et par av vektorfunksjoner $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t))$ definert på $[t_0, t_1]$ som maksimerer (1) gitt betingelsene $(2) - (4)$:[3]

$$\max_{u \in U \in \mathbb{R}} \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\, dt \tag{1}$$

gitt med følgende betingelser:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \tag{2}$$

$$\mathbf{x}^0 = x_1^0, \dots, x_n^0 \tag{3}$$

$$\begin{aligned} x_i(t_1) &= x_i^1, & i &= 1, \dots, l \\ x_i(t_1) &\geq x_i^1, & i &= 1, \dots, m \\ x_i(t_1) &\;\; fri, & i &= 1, \dots, n \end{aligned} \tag{4}$$

Hvor $\mathbf{f} = f_1, \dots, f_n, \mathbf{x} = x_1, \dots, x_n, \mathbf{u} = u_1, \dots, u_r$, og f_0 og f_i er gitte funksjoner i $\mathbb{R}^{1+n+r}$. U er en gitt delmengde i $\mathbb{R}$ og t_0, t_1, x_0 og x_i^1 er gitte verdier og kontrollfunksjonen er $u(t)$. Paret $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ kalles tillatt hvis $\mathbf{u}(t)$ er stykkevis kontinuerlige og $\mathbf{x}(t)$ er den tilhørende kontinuerlige og stykkevis deriverbar vektorfunksjon som tilfredsstiller (2) - (5). $\mathbf{p}(t) = p_1, \dots, p_n$ er adjungerte funskjoner til de n differensiallikninger. Hamilton-funksjonen er følgende definert:

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = p_0 f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{5}$$

[3] Sydsæter, Seierstad og Strøm (2002)

2.1 Pontryagin maksimumsprinsipp. Standardproblemet

Anta at $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ er et tillatt par som løser problemene (1) - (5). Da fins det en konstant p_0 og en kontinuerlig og stykkevis deriverbar funksjon $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), \ldots, p_n(t))$ slik at for alle t i $[t_0, t1]$ har vi[4]:

$$(p_0, \mathbf{p}(t)) \neq (0, \mathbf{0}) \qquad \forall\ t \in [t_0, t1] \tag{6}$$

$$H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}, \mathbf{p}(t)) \leq H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}(t) \qquad \forall\ \mathbf{u} \in U \tag{7}$$

For de t der $\mathbf{u}(t)$, er kontinuerlig med hensyn på t, vil de adjungerte variablene tilfredsstille

$$\dot{p}_i(t) = \frac{-\partial H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}(t))}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{8}$$

Til endebetingelsene i (4) svarer det tilhørende transversalitetsbetingelser:

$$\begin{aligned}
&p_i(t_1) \quad \text{ingen betingelser}, && i = 1, \ldots, l \\
&p_i(t_1) \geq 0 \quad (= 0 \text{ hvis } x_i^*(t_1) > x_1^i) && i = l+1, \ldots, m \\
&p_i(t_1) = 0 && i = m+1, \ldots, n
\end{aligned} \tag{9}$$

2.2 Diskontinuitetsproblemer

Hvis tilstandsvariabelen i kontrollproblemet har en skranke slik at når den krysses medfører det diskontinuitet i differensiallikningen og/eller i integranden i kriteriet. For å angripe slike problemer har vi behov for noen nødvendige tilleggsbetingelser i tillegg til de nødvendige betingelser som standard maksimumsprinsipp gir for generelle dynamiske optimeringsproblemer. I denne oppgaven er modellene begrenset til en grense som fører til diskontinuitet i systemet over planperioden en gang, men generalisering kan muliggjøres til mange diskontinuitetstidspunkter, men endelige. [5]

La ϕ være en gitt reell C^1 (partielle deriverte av første orden eksisterer og er kontinuerlig) funksjon på (t, x) - planet. La $\Gamma \equiv \{(t, x) : \phi(t, x) = 0\}$,

[4]Sydsæter, Seierstad og Strøm (2002)

[5]Se Seierstad og Stabrun (2007)

vi antar at f_0, f'_{0_x}, f_i og $f'_{i_{x_j}}$ (for $i, j = 1, \ldots, n$) er kontinuerlige i (t, x, u), $(t, x) \notin \Gamma$ [6].

2.3 Nødvendige diskontinuitetsbetingelser

Anta at den optimale løsningen $x^*(t)$ krysser eller berører overflaten $\Gamma \equiv \{(t, x) : \phi(t, x) = 0\}$ på (NT) vis (presisert nedenfor) og at det paret $(x^*(.), u^*('))$ er strengt tillatt. Hvis $(t_1, x^*(t_1-)) \notin \Gamma$ (t_1 fast horisont), vil standard maksumumsprinsipp også gjelde her, men den adjungerte funksjonen $p(.)$ gjør et sprang ved $\tau \in (t_0, t_1)$ en gang, i et punkt $t = \tau$. Da har vi følgende nødvendige diskontinuitetsbetingelser[7]:

$$\begin{aligned} p(\tau-) - p(\tau+) = p_0[f_0(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-)) - f_0(\tau, x^*(\tau+), u^*(\tau+))]\mu \\ +[p(\tau+)f(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-)) - p(\tau+)f(\tau, x^*(\tau+), u^*(\tau+))]\mu \end{aligned} \tag{10}$$

Her er n-vektoren $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ bestemt av følgende sammenheng:

$$\begin{aligned} &[\phi_t(\tau, x^*(\tau-)) + \phi_x(\tau, x^*(\tau-))f(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-))]\mu_i \\ &+ \phi_x(\tau, x^*(\tau-)) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

hvor

$$\begin{aligned} &\phi_x(\tau, x^*(\tau-))f(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-)) \\ &= \sum_i (\partial\phi(\tau, x^*(\tau-))/\partial x_i) f_i(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-)) \end{aligned} \tag{12}$$

Den ikke-tangerende betingelsen på $x^*(t)$, (NT), er at for hver $t \in (t_0, t_1)$

$$\begin{aligned} &\phi(t, x^*(t)) = 0 \Rightarrow \\ &\partial\phi(t, x^*(t))/\partial t + \sum_i (\partial\phi(t, x^*(t))/\partial x_i f_i(t, x^*(t\pm), u^*(t\pm)) \neq 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Vi nærmer oss Γ og forlater Γ ikke-tangentielt, i "spissvinkel".

[6] Seierstad og Stabrun (2007)
[7] Seierstad og Stabrun (2007)

3 Modell 1. Oljeutvinning

Her tar jeg for meg et kontrollproblem innenfor oljeutvinning. Det er et oljeselskap som er en profittmaksimerende monopolist som ønsker å finne en optimal pris over produksjonsperioden. I modellen er det mange etterspørrere, men kun en tilbyder. Oljeselskapet har en restriksjon på sin prissetting slik at når selskapet skal finne en optimal pris over en periode må det ta hensyn til denne restriksjonen. Denne restriksjonen er slik at når den gjennomsnittlige oljeprisen er høy over tid vil det føre til at investorer vil bidra med investeringer i en backstop teknologi[8], et substitutt eller flere substitutter med uendelig ressurser. Investorer starter med å gi bidrag til en backstop teknologi hvis den gjennomsnittlige oljeprisen overstiger grensen $\bar{z}$.

Hvis monopolisten ønsker å sette en høy pris risikerer den å miste sin markedsposisjon, men får en høy profittrate på "kort sikt". Setter monopolisten en lav pris vil monopolisten forbli monopolist, men får en lavere profittrate. Derfor vil det være interessant for monopolisten å undersøke sin optimale pris og krysningstidspunktet over produksjonsperioden. Hvis gjennomsnittsprisen krysser grensen vil problemet være å finne den optimale utvinningsraten.

Her lar vi $x(t)$ betegne mengden olje i et reservoar på tidspunkt t og antar at ved $t = 0$ inneholder feltet x_0 tonn olje. Ettersom kostnadene ikke endres i karakter i planperioden, ser vi bort fra det. Den momentane inntektsraten på tidspunkt t er dermed gitt ved:

$$I(t, x(t)) = (a - bq(t))q(t) + (1 - \alpha)u\bar{q}$$

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{hvis } z(t) < \bar{z} \\ 0 & \text{hvis } z(t) \geq \bar{z} \end{cases}$$

$q = q(t)$ er monopolprisen på tidspunkt t og $\bar{q}$ er en gitt oljepris på verdensmarkedet. $u = u(t)$er utvinningsraten på tidspunkt t, og q og u er kontrollvariable. a, b og d er positive konstanter og $(a - bq) > 0$.

Forutsetter at: $\frac{a}{2} < \tilde{u} < a - b\bar{q}$ og $\bar{q} < \frac{a}{2b}$.

[8]Nordhaus (1973) var den første til å definere begrepet *backstop technology* og definerte det slik: a set of processes that (1) is capable of meeting the demand requirements and (2) has a virtually infinite resource base.

3.1 Løsningsforslag

3.1.1 Tilfelle (I) Modell uten backstop teknologi

Undersøker modellen hvor det ikke eksisterer *backstop teknologi*, $\alpha = 1$. Makserimeringsproblemet for monopolisten blir da:

$$\int_0^T \left[(a-bq)q\right]e^{-rt}\,dt$$

$$\dot{x} = -(a-bq), \quad x(0) = x_0 > 0, \quad x(T) \geq 0, \quad q \geq 0, \quad a,b > 0$$

$$\dot{z} = dq, \quad z(0) = 0, \quad z(T)\,fri$$

Løser problemet med r=0. Hamilton-funksjon (H):

$$H = (a-bq)q + p_x(-(a-bq)) + p_z dq$$

$$\begin{aligned} H_q' &= (-b)q + (a-bq) + p_x(b) + p_z d \\ &= a - 2bq + bp_x + dp_z \end{aligned}$$

$$H_q' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2bq = a + bp_x + dp_z$$

$$q(t) = \frac{a + bp_x + dp_z}{2b}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= -H_x' = 0 \\ p_x(t) &= A \end{aligned}$$

Til endebetingelsen $x(T) \geq 0$, får vi den tilhørende transversalitets-betingelsen:

$$p_x(T) \geq 0 \quad (= 0 \text{ hvis } x^*(T) > 0)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_z &= -H_z' = 0 \\ p_z(t) &= B \end{aligned}$$

Til endebetingelsen $z(T)\,fri$ får jeg den tilhørende transversalitets-betingelsen:

$$p_z(T) = 0$$

Utømt reservoar

$x(T) > 0 \quad \Rightarrow \quad p_x(T) = 0$

$$q(t) = \frac{a}{2b} \quad , \quad p_x(t) = 0$$

$$\dot{x} = -(a - b(\frac{a}{2b})) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = -a + \frac{a}{2} = -\frac{a}{2}$$

$$x(t) = -\frac{a}{2}t + C \quad , \quad x(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(0) = C = x_0$$
$$x(t) = x_0 - \frac{a}{2}t \qquad t \in [0, T]$$

$$\dot{z} = \frac{ad}{2b} \quad , \quad z(t) = \frac{ad}{2b}t + D \quad \Rightarrow \quad z(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0$$
$$z(t) = \frac{ad}{2b}t \qquad t \in [0, T]$$

$$x(T) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 - \frac{a}{2}T > 0 \quad \Leftrightarrow \quad T < \frac{2x_0}{a}$$
$$z(T) \leq \bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ad}{2b}T \leq \bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad T \leq \frac{2b\bar{z}}{ad}$$

Med $x(T) > 0$ og $p_x(T) = 0$ får jeg følgende løsning:

$$q(t) = \frac{a}{2b} \qquad t \in [0, T]$$
$$x(t) = x_0 - \frac{a}{2}t \qquad t \in [0, T]$$
$$z(t) = \frac{ad}{2b}t \qquad t \in [0, T]$$
$$p(t) = 0 \qquad t \in [0, T]$$

$$T \in [0, \frac{2x_0}{a})$$

Tømt reservoar

$p_x(T) > 0 \quad \Rightarrow \quad x(T) = 0$

$$p_x(t) = A \;\; , \;\; p_z(t) = 0 \;\; , \;\; q(t) = \frac{a + Ab}{2b}$$
$$\dot{x} = -a + b\frac{a + Ab}{2b} = \frac{-a + Ab}{2}$$

$$x(t) = \frac{-a + Ab}{2}t + C \;\; , \;\; x(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad C = x_0$$
$$x(t) = x_0 + \frac{-a + Ab}{2}t$$

$$x(T) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 + \frac{-a + Ab}{2}T = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; A = \frac{a}{b} - \frac{2x_0}{bT}$$

$$p_x(T) > 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; (a - \frac{2x_0}{T})\frac{1}{b} > 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; T > \frac{2x_0}{a}$$
$$z(T) = (a - \frac{x_0}{T})\frac{d}{b}T \leq \bar{z} \;\; \Leftrightarrow \;\; T \leq (dx_0 + b\bar{z})\frac{1}{ad}$$

Med $p_x(T) > 0$ og $x(T) = 0$, får jeg følgende løsning:

$$q(t) = (a - \frac{x_0}{T})\frac{1}{b} \;\; < \;\; \frac{a}{2b} \quad t \in [0, T]$$
$$x(t) = x_0 - \frac{x_0}{T}t \qquad t \in [0, T]$$
$$z(t) = (a - \frac{x_0}{T})\frac{d}{b}t \qquad t \in [0, T]$$
$$p_x(t) = (a - \frac{2x_0}{T})\frac{1}{b} \qquad t \in [0, T]$$

$$T \in (\frac{2x_0}{a}, (dx_0 + b\bar{z})\frac{1}{ad})$$

3.1.2 Tilfelle (II) Modell med backstop teknologi

Undersøker modellen med *backstop teknologi*. Monopolisten står da ovenfor følgende maksimeringsproblem over intervallet $[0, T]$ når diskonteringsraten er r:

$$\int_0^T \left[\alpha(a - bq(t))q(t) + (1-\alpha)u\bar{q}\right]e^{-rt}\ dt$$

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{hvis } z(t) < \bar{z} \\ 0 & \text{hvis } z(t) \geq \bar{z} \end{cases}$$

$\dot{x} = -\alpha(a - bq(t)) - (1-\alpha)u, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) \geq 0, \quad u(t) \geq 0$
$z(t) = \int_0^t dq(s)ds$ (monopolistens gjennomsnittspris på oljen)
$\dot{z} = dq(t), \quad z(0) = 0, \quad z(T)\ fri$

Det forutsettes at $0 \leq u \leq \tilde{u}$, der $\tilde{u}$ er den maximale utvinningsraten.

Kontrollproblemet er gitt av følgende diskontinuitet i kriteriefunksjonen og differensiallikningene: $\phi(t, x(t)) = z(t) - \bar{z}$. Den adjungerte funksjonen $p_z(t)$ får et sprang i tidspunktet $t = \tau$, siden diskontinuitetet er forbundet med tilstandsvariabelen $z(t)$.

$$\alpha = \begin{cases} 1 & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

Med r=0, har vi følgende Hamilton-funksjon (H):

$$H = \alpha(a - bq)q + (1-\alpha)u\bar{q} + p_x(-\alpha(a - bq) - (1-\alpha)u) + p_z dq$$

$$\begin{aligned} H_q' &= \alpha(-b)q + \alpha(a - bq) + p_x(-\alpha(-b)) + p_z d \\ &= -\alpha bq + \alpha a - \alpha bq + \alpha b p_x + dp_z \\ &= -2\alpha bq + \alpha a + \alpha b p_x + dp_z \end{aligned}$$

$$H_{qq}'' = -2\alpha b \quad \leq 0 \quad \text{(Hamilton-funksjonen er konkav i q)}$$

$$
\begin{aligned}
H_q^{'} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha q &= \alpha a + \alpha b p_x + d p_z \\
q &= \frac{\alpha a + \alpha b p_x + d p_z}{2\alpha b}
\end{aligned}
$$

For u ser vi fra Hamilton-funksjonen at

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & (1-\alpha)u(\bar{q} - p_x) \\
u(t) = & \begin{cases} \tilde{u} & \text{hvis } \bar{q} > p_x \\ 0 & \text{hvis } \bar{q} \leq p_x \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_x &= -H_x^{'} = 0 \\
p_x(t) &= A
\end{aligned}
$$

Til endebetingelsen $x(T) \geq 0$, får vi den tilhørende transversalitets-betingelsen:

$$
p_x(T) \geq 0 \quad (= 0 \text{ hvis } x^*(T) > 0)
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_z &= -H_z^{'} = 0 \\
p_z(t) &= B
\end{aligned}
$$

Til endebetingelsen $z(T)$ fri, får vi den tilhørende transervalitets-betingelsen:

$$
p_z(T) = 0
$$

Utømt reservoar

$x(T) > 0 \quad \Rightarrow \quad p_x(T) = 0$

$$p_x(t) = \begin{cases} A & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}, \qquad p_z(t) = \begin{cases} B & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$q(t) = \begin{cases} \frac{(a+Ab+Bd)}{2b} & t \in [0, \tau) \\ \bar{q} & t \in [\tau, T] \end{cases}, \qquad u(t) = \begin{cases} (a - bq) & t \in [0, \tau) \\ \tilde{u} & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{cases} \frac{(-a+Ab+Bd)}{2} & t \in [0, \tau) \\ -\tilde{u} & t \in [\tau, T] \end{cases}, \qquad x(t) = \begin{cases} \frac{(-a+Ab+Bd)}{2} t + C_1 & t \in [0, \tau) \\ -\tilde{u}t + C_2 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$\dot{z} = \begin{cases} \frac{(a+Ab+Bd)d}{2b} & t \in [0, \tau) \\ d\bar{q} & t \in [\tau, T] \end{cases}, \qquad z(t) = \begin{cases} \frac{(a+Ab+Bd)d}{2b} t + D_1 & t \in [0, \tau) \\ d\bar{q}t + D_2 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$x(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = x_0$$
$$x(t) = \frac{(-a + Ab + Bd)}{2} t + x_0 \qquad t \in [0, \tau)$$

$$x(\tau-) = x(\tau+)$$
$$\frac{(-a + Ab + Bd)}{2} \tau + x_0 = -u\tau + C_2$$
$$\frac{(-a + Ab + Bd)}{2} \tau + x_0 + u\tau = C_2$$
$$x(t) = (\tau - t)u + x_0 \frac{(-a + Ab + Bd)}{2} \tau \qquad t \in [\tau, T]$$

$$z(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad D_1 = 0$$
$$z(t) = \frac{d(a + Ab + Bd)}{2b} t \qquad t \in [0, \tau)$$

$$z(\tau-) = z(\tau+) = \bar{z}$$

$$\begin{aligned} z(\tau-) = d\bar{q}\tau + D_2 &= \bar{z} \\ D_2 &= \bar{z} - d\bar{q}\tau \end{aligned}$$

$$z(t) = d\bar{q}(t-\tau) + \bar{z} \qquad t \in [\tau, T]$$

$$\begin{aligned} z(\tau-) &= \bar{z} \\ \frac{d(a+Ab+Bd)}{2b}\tau &= \bar{z} \\ Ab &= \frac{2b\bar{z}}{d\tau} - a - Bd \end{aligned}$$

Bruker diskontinuitetsbetingelsene for å finne A og B, med skranken definert som $\phi(t, x(t)) = z(t) - \bar{z}$, ((NT) betingelsen er oppfylt her).

$$\begin{aligned} &[\phi_t(\tau, x^*(\tau-)) + \phi_x(\tau, x^*(\tau-))f(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-))]\mu_i \\ &+ \phi_x(\tau, x^*(\tau-)) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[0 + [0 \quad 1]\begin{bmatrix} \frac{b\bar{z}}{d\tau} - a \\ \frac{\bar{z}}{\tau} \end{bmatrix}\right]\mu_1 + 0 &= 0 \\ \mu_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[0 + [0 \quad 1]\begin{bmatrix} \frac{b\bar{z}}{d\tau} - a \\ \frac{\bar{z}}{\tau} \end{bmatrix}\right]\mu_2 + 1 &= 0 \\ \mu_2 &= -\frac{\tau}{\bar{z}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(\tau-) - p(\tau+) = {} & p_0[f_0(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-)) - f_0(\tau, x^*(\tau+), u^*(\tau+))]\boldsymbol{\mu} \\ & +[p(\tau+)f(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-)) - p(\tau+)f(\tau, x^*(\tau+), u^*(\tau+))]\boldsymbol{\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\Bigg((a - b(\frac{\bar{z}}{d\tau}))\frac{\bar{z}}{d\tau} - \tilde{u}\bar{q}\Bigg) \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\tau}{\bar{z}} \end{bmatrix} + 0$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -(a - \frac{b\bar{z}}{d\tau})\frac{1}{d} + \frac{\tilde{u}\bar{q}\tau}{\bar{z}} \end{bmatrix}$$

$$A = 0$$
$$B = \frac{\tilde{u}\bar{q}\tau}{\bar{z}} - (a - \frac{b\bar{z}}{d\tau})\frac{1}{d}$$

$$\Rightarrow \quad Ab = \frac{2b\bar{z}}{\tau} - a - Bd$$
$$0 = \frac{2b\bar{z}}{d\tau} - a - (\frac{\tilde{u}\bar{q}\tau}{\bar{z}} - (a - \frac{b\bar{z}}{d\tau})\frac{1}{d})d$$
$$0 = \frac{b\bar{z}}{d\tau} - \frac{d\tilde{u}\bar{q}\tau}{\bar{z}}$$
$$\frac{d\tilde{u}\bar{q}\tau}{\bar{z}} = \frac{b\bar{z}}{d\tau}$$
$$\tau = \pm\frac{\bar{z}}{d}\sqrt{\frac{b}{\tilde{u}\bar{q}}}$$
$$\tau = \frac{\bar{z}}{d}\sqrt{\frac{b}{\bar{q}\tilde{u}}} \geq \frac{2b\bar{z}}{ad}$$

$$x(T) > 0$$
$$\tilde{u}(\tau - T) + x_0 + \big(- a + \frac{d\tilde{u}\bar{q}\tau}{\bar{z}} - a + \frac{b\bar{z}}{d\tau}\big)\frac{\tau}{2} >$$
$$\tilde{u}\tau - \tilde{u}T + x_0 + \frac{d\tilde{u}\bar{q}\tau^2}{2\bar{z}} + \frac{b\bar{z}}{2d} - a\tau > 0$$
$$x_0 + (\frac{d\tilde{u}\bar{q}}{2\bar{z}})(\frac{b\bar{z}^2}{d^2\tilde{u}\bar{q}}) + \frac{b\bar{z}}{2d} + (\tilde{u} - a)\frac{\bar{z}}{d}\sqrt{\frac{b}{\tilde{u}\bar{q}}} > \tilde{u}T$$
$$T < \frac{x_0 + \frac{b\bar{z}}{d} - (a - \tilde{u})\frac{\bar{z}}{d}\sqrt{\frac{b}{\bar{q}\tilde{u}}}}{\tilde{u}}$$

Jeg får følgende mulig løsning med $x(T) > 0, \quad p_x(T) = 0:$

$$\alpha = \begin{cases} 1 & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$q(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{b\bar{q}\tilde{u}}}{b} & t \in [0, \tau) \\ \bar{q} & t \in [\tau, T] \end{cases}, \qquad u(t) = \begin{cases} a - \sqrt{b\bar{q}\tilde{u}} & t \in [0, \tau) \\ \tilde{u} & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + \left(\sqrt{b\bar{q}\tilde{u}} - a\right)t & t \in [0, \tau) \\ (\tau - t)\tilde{u} + x_0 + \left(\sqrt{b\bar{q}\tilde{u}} - a\right)\tau & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$z(t) = \begin{cases} \frac{d}{b}\sqrt{b\bar{q}\tilde{u}} & t \in [0, \tau) \\ d\bar{q}(t - \tau) + \bar{z} & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$p_x(t) = 0 \qquad t \in [0, T], \qquad p_y(t) = \begin{cases} \frac{1}{d}\left(2\sqrt{b\bar{q}\tilde{u}} - a\right) & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$\tau = \frac{\bar{z}}{d}\sqrt{\frac{b}{\bar{q}\tilde{u}}}$$

$$T < \frac{x_0 + \frac{b\bar{z}}{d} - (a - \tilde{u})\frac{\bar{z}}{d}\sqrt{\frac{b}{\bar{q}\tilde{u}}}}{\tilde{u}}$$

Tømt reservoar med $\bar{q} > p_x(t)$

$p_x(T) > 0 \quad \Rightarrow \quad x(T) = 0, \quad$ og $\quad \bar{q} > p_x(t)$

$$p_x(t) = \begin{cases} A_1 & t \in [0, \tau) \\ A_2 & t \in [\tau, T] \end{cases}, \qquad p_z(t) = \begin{cases} B & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$q(t) = \begin{cases} \frac{(a+A_1 b+Bd)}{2b} & t \in [0,\tau) \\ \bar{q} & t \in [\tau, T] \end{cases}, \qquad u(t) = \begin{cases} (a-bq) & t \in [0,\tau) \\ \tilde{u} & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{cases} \frac{(-a+A_1 b+Bd)}{2} & t \in [0,\tau) \\ -\tilde{u} & t \in [\tau, T] \end{cases}, \qquad x(t) = \begin{cases} \frac{(-a+A_1 b+Bd)}{2}t + C_1 & t \in [0,\tau) \\ -\tilde{u}t + C_2 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$\dot{z} = \begin{cases} \frac{(a+A_1 b+Bd)d}{2b} & t \in [0,\tau) \\ d\bar{q} & t \in [\tau, T] \end{cases}, \qquad z(t) = \begin{cases} \frac{(a+A_1 b+Bd)d}{2b}t + D_1 & t \in [0,\tau) \\ d\bar{q}t + D_2 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$x(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = x_0$$
$$x(t) = \frac{(-a + A_1 b + Bd)}{2}t + x_0 \qquad t \in [0,\tau)$$

$$x(T) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \tilde{u}T$$
$$x(t) = (T-t)\tilde{u} \qquad t \in [\tau, T]$$

$$z(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad D_1 = 0$$
$$z(t) = \frac{d(a + A_1 b + Bd)}{2b}t \qquad t \in [0,\tau)$$
$$z(\tau-) = z(\tau+) = \bar{z}$$

$$z(\tau+) = d\bar{q}\tau + D_2 = \bar{z}$$
$$D_2 = \bar{z} - d\bar{q}\tau$$
$$z(t) = d\bar{q}(t-\tau) + \bar{z} \qquad t \in [\tau, T]$$

$$z(\tau-) = \bar{z}$$
$$\frac{d(a + A_1 b + Bd)}{2b}\tau = \bar{z}$$
$$A_1 b = \frac{2b\bar{z}}{d\tau} - a - Bd$$

$$
\begin{aligned}
x(\tau-) &= x(\tau+)\\
\frac{(-a + A_1 b + Bd)}{2}\tau + x_0 &= (T-\tau)\tilde{u}\\
(2\tilde{u} - a + \frac{2b\bar{z}}{d\tau} - a - Bd + Bd)\tau &= 2T\tilde{u} - 2x_0\\
2(\tilde{u} - a)\tau + \frac{2b\bar{z}}{d} &= 2(\tilde{u}T - x_0)\\
\tau = \frac{x_0 + \frac{b\bar{z}}{d} - T\tilde{u}}{a - \tilde{u}}
\end{aligned}
$$

Bruker diskontinuitetsbetingelsene for å finne A_2 og B, med skranken definert som $\phi(t, x(t)) = z(t) - \bar{z}$, ((NT) betingelsen er oppfylt).

$$
\begin{aligned}
&[\phi_t(\tau, x^*(\tau-)) + \phi_x(\tau, x^*(\tau-)) f(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-))]\mu_i\\
&+ \phi_x(\tau, x^*(\tau-)) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[0 + [0 \quad 1]\begin{bmatrix} \frac{b\bar{z}}{d\tau} - a \\ \frac{\bar{z}}{\tau}\end{bmatrix}\right]\mu_1 + 0 &= 0\\
\mu_1 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[0 + [0 \quad 1]\begin{bmatrix} \frac{b\bar{z}}{d\tau} - a \\ \frac{\bar{z}}{\tau}\end{bmatrix}\right]\mu_2 + 1 &= 0\\
\mu_2 &= -\frac{\tau}{\bar{z}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(\tau-) - p(\tau+) = p_0[f_0(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-)) - f_0(\tau, x^*(\tau+), u^*(\tau+))]\boldsymbol{\mu}\\
+[p(\tau+) f(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-)) - p(\tau+) f(\tau, x^*(\tau+), u^*(\tau+))]\boldsymbol{\mu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A_1 \\ B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_2 \\ 0 \end{bmatrix} &= 1\left((a - b(\frac{\bar{z}}{d\tau}))\frac{\bar{z}}{d\tau} - \tilde{u}\bar{q}\right)\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\tau}{\bar{z}} \end{bmatrix}\\
&+ \left[[A_2 \quad 0]\begin{bmatrix} \frac{b\bar{z}}{d\tau} - a \\ \frac{\bar{z}}{\tau}\end{bmatrix} - [A_2 \quad 0]\begin{bmatrix} -\tilde{u} \\ d\bar{q}\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\tau}{\bar{z}} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(a - \frac{b\bar{z}}{d\tau})\frac{1}{d} + \frac{\tilde{u}\bar{q}\tau}{\bar{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{A_2}{d\bar{z}}(ad\tau + d\tau\tilde{u} - b\bar{z}) \end{bmatrix}$$

$$A_1 = A_2 = \frac{2\bar{z}}{d\tau} - \frac{(a+Bd}{b}$$

$$B = \bar{q}\tilde{u}\frac{\tau}{\bar{z}} - (a - \frac{b\bar{z}}{d\tau})\frac{1}{d} + \frac{1}{bd\bar{z}}\big(\frac{2b\bar{z}}{d\tau} - a - Bd\big)\big(ad\tau + d\tau\tilde{u} - b\bar{z}\big)$$
$$= \frac{bd^2\bar{q}\tau^2\tilde{u} + 2(a+\tilde{u})bd\tau\bar{z} - a(a+\tilde{u})d^2\tau^2 - b^2\bar{z}^2}{(a+u)d^3\tau^2}$$

$$A_1 = A_2 = \frac{b\bar{z}^2 - d^2\bar{q}\tau^2\tilde{u}}{(a+\tilde{u})d^2\tau^2} = \frac{b\bar{z}^2}{(a+\tilde{u})d^2\tau^2} - \frac{\bar{q}\tilde{u}}{a+\tilde{u}}$$

$$\begin{aligned}
p_x(T) &> 0 \\
\frac{b\bar{z}^2 - d^2\bar{q}\tau^2\tilde{u}}{(a+\tilde{u})d^2\tau^2} &> 0 \\
b\bar{z}^2 - d^2\bar{q}\tau^2\tilde{u} &> 0 \\
b\bar{z}^2 - d^2\bar{q}\tilde{u}\big(\frac{T\tilde{u} - x_0 - \frac{b\bar{z}}{d}}{\tilde{u} - a}\big)^2 &> 0 \\
T &> \frac{x_0 + \frac{b\bar{z}}{d} - (a - \tilde{u})\frac{\bar{z}}{d}\sqrt{\frac{b}{\bar{q}\tilde{u}}}}{\tilde{u}} \\
T &< \frac{x_0 + \frac{b\bar{z}}{d} + (a - \tilde{u})\frac{\bar{z}}{d}\sqrt{\frac{b}{\bar{q}\tilde{u}}}}{\tilde{u}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&p_x(t) < \bar{q} \\
&\qquad \frac{b\bar{z}^2}{(a+\tilde{u})d^2\tau^2} - \frac{\bar{q}\tilde{u}}{a+\tilde{u}} < \bar{q} \\
&\qquad \frac{b\bar{z}^2}{d^2\left(\frac{x_0+\frac{b\bar{z}}{d}-T\tilde{u}}{a-\tilde{u}}\right)^2} - \bar{q}\tilde{u} < \bar{q}(a+\tilde{u}) \\
&\qquad T < \frac{x_0 + \frac{b\bar{z}}{d} - (a-\tilde{u})\frac{\bar{z}}{d}\sqrt{\frac{b}{\bar{q}(a+2\tilde{u})}}}{\tilde{u}}, \qquad \text{eller} \\
&\qquad T > \frac{x_0 + \frac{b\bar{z}}{d} + (a-\tilde{u})\frac{\bar{z}}{d}\sqrt{\frac{b}{\bar{q}(a+2\tilde{u})}}}{\tilde{u}}
\end{aligned}
$$

Jeg får følgende mulig løsning med $p_x(T) > 0$, $x(T) = 0$ og gitt at $\bar{q} > p_x(t)$

$$
\alpha = \begin{cases} 1 & t \in [0,\tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}
$$

$$
q(t) = \begin{cases} \frac{\bar{z}}{d\tau} & t \in [0,\tau) \\ \bar{q} & t \in [\tau, T] \end{cases}, \qquad u(t) = \begin{cases} a - \frac{b\bar{z}}{d\tau} & t \in [0,\tau) \\ \tilde{u} & t \in [\tau, T] \end{cases}
$$

$$
x(t) = \begin{cases} x_0 + \left(a - \frac{b\bar{z}}{d\tau}\right)t & t \in [0,\tau) \\ (T-t)\tilde{u} & t \in [\tau, T] \end{cases}, \qquad z(t) = \begin{cases} \frac{\bar{z}}{\tau}t & t \in [0,\tau) \\ d\bar{q}(t-\tau) + \bar{z} & t \in [\tau, T] \end{cases}
$$

$$
p_x(t) = \frac{b\bar{z}^2 - d^2\bar{q}\tau^2\tilde{u}}{(a+\tilde{u})d^2\tau^2} < \bar{q} \qquad t \in [0, T]
$$

$$
p_z(t) = \begin{cases} \frac{bd^2\bar{q}\tau^2\tilde{u} + 2(a+\tilde{u})bd\tau\bar{z} - a(a+\tilde{u})d^2\tau^2 - b^2\bar{z}^2}{(a+u)d^3\tau^2} & t \in [0,\tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}
$$

$$
\tau = \frac{x_0 + \frac{b\bar{z}}{d} + T\tilde{u}}{a - \tilde{u}}
$$

$$T \in \left(\frac{x_0 + \frac{b\bar{z}}{d} - (a-\tilde{u})\frac{\bar{z}}{d}\sqrt{\frac{b}{\bar{q}\tilde{u}}}}{\tilde{u}}, \frac{x_0 + \frac{b\bar{z}}{d} + (a-\tilde{u})\frac{\bar{z}}{d}\sqrt{\frac{b}{\bar{q}\tilde{u}}}}{\tilde{u}} \right)$$

$$T = \begin{cases} < \frac{x_0 + \frac{b\bar{z}}{d} - (a-\tilde{u})\frac{\bar{z}}{d}\sqrt{\frac{b}{\bar{q}(a+2\tilde{u})}}}{\tilde{u}} \\ \text{eller} \\ > \frac{x_0 + \frac{b\bar{z}}{d} + (a-\tilde{u})\frac{\bar{z}}{d}\sqrt{\frac{b}{\bar{q}(a+2\tilde{u})}}}{\tilde{u}} \end{cases}$$

Tømt reservoar med $\bar{q} \leq p_x(t)$

$$p_x(T) > 0 \quad \Rightarrow \quad x(T) = 0, \quad \text{og} \quad \bar{q} \leq p_x(t)$$

Monopolisten stanser produksjonen etter å ha krysset grensen (kriteriets verdi blir lik null i $t \in [\tau, T]$). Mulig løsning for maksimeringsproblemet blir tilsvarende som sist løsning, men for planperioden $t \in [0, \tau]$.

$$p_x(t) = \begin{cases} A_1 & t \in [0,\tau) \\ A_2 & t \in [\tau, T] \end{cases}, \qquad p_z(t) = \begin{cases} B & t \in [0,\tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$q(t) = \begin{cases} \frac{(a+A_1b+Bd)}{2b} & t \in [0,\tau) \\ \bar{q} & t \in [\tau, T] \end{cases}, \qquad u(t) = \begin{cases} (a-bq) & t \in [0,\tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{cases} \frac{(-a+A_1b+Bd)}{2} & t \in [0,\tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}, \qquad x(t) = \begin{cases} \frac{(-a+A_1b+Bd)}{2}t + C_1 & t \in [0,\tau) \\ C_2 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$\dot{z} = \begin{cases} \frac{(a+A_1b+Bd)d}{2b} & t \in [0,\tau) \\ d\bar{q} & t \in [\tau, T] \end{cases}, \qquad z(t) = \begin{cases} \frac{(a+A_1b+Bd)d}{2b}t + D_1 & t \in [0,\tau) \\ d\bar{q}t + D_2 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$x(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = x_0$$
$$x(t) = x_0 + \frac{(-a + A_1 b + Bd)}{2} t \qquad t \in [0, \tau)$$

$$x(T) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \;\; , \;\; x(t) = 0 \qquad t \in [\tau, T]$$

$$z(0) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; D_1 = 0 \;\; z(t) = \frac{d(a + A_1 b + Bd)}{2b} t \quad t \in [0, \tau)$$
$$z(\tau-) = z(\tau+) = \bar{z}$$

$$z(\tau+) = d\bar{q}\tau + D_2 = \bar{z}$$
$$D_2 = \bar{z} - d\bar{q}\tau$$
$$z(t) = d\bar{q}(t - \tau) + \bar{z} \qquad , \quad t \in [\tau, T]$$

$$z(\tau-) = \bar{z}$$
$$\frac{d(a + A_1 b + Bd)}{2b} \tau = \bar{z}$$
$$A_1 b = \frac{2b\bar{z}}{d\tau} - a - Bd$$

$$x(\tau-) = x(\tau+)$$
$$\frac{(-a + A_1 b + Bd)}{2} \tau + x_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tau = \frac{x_0 + \frac{b\bar{z}}{d}}{a}$$

Bruker diskontinuitetsbetingelsene for å finne A_2 og B, med skranken definert som $\phi(t, x(t)) = z(t) - \bar{z}$, ((NT) betingelsen er oppfylt).

$$[\phi_t(\tau, x^*(\tau-)) + \phi_x(\tau, x^*(\tau-)) f(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-))]\mu_i$$
$$+ \phi_x(\tau, x^*(\tau-)) = 0$$

$$\left[0 + [0 \quad 1]\begin{bmatrix} \frac{b\bar{z}}{d\tau} - a \\ \frac{\bar{z}}{\tau} \end{bmatrix}\right]\mu_1 + 0 = 0$$
$$\mu_1 = 0$$

$$\left[0 + [0 \quad 1]\begin{bmatrix} \frac{b\bar{z}}{d\tau} - a \\ \frac{\bar{z}}{\tau} \end{bmatrix}\right]\mu_2 + 1 = 0$$
$$\mu_2 = -\frac{\tau}{\bar{z}}$$

$$\begin{aligned} p(\tau-) - p(\tau+) = p_0[f_0(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-)) - f_0(\tau, x^*(\tau+), u^*(\tau+))]\boldsymbol{\mu} \\ +[p(\tau+)f(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-)) - p(\tau+)f(\tau, x^*(\tau+), u^*(\tau+))]\boldsymbol{\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_1 \\ B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_2 \\ 0 \end{bmatrix} &= 1\left((a - b(\frac{\bar{z}}{d\tau}))\frac{\bar{z}}{d\tau} - 0\right)\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\tau}{\bar{z}} \end{bmatrix} \\ &+ \left[[A_2 \quad 0]\begin{bmatrix} \frac{b\bar{z}}{d\tau} - a \\ \frac{\bar{z}}{\tau} \end{bmatrix} - [A_2 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 \\ d\bar{q} \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\tau}{\bar{z}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(a - \frac{b\bar{z}}{d\tau})\frac{1}{d} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ A_2(\frac{b\bar{z}}{d\tau} - a)\frac{\tau}{\bar{z}} \end{bmatrix}$$

$$A_1 = A_2 = \frac{2\bar{z}}{d\tau} - \frac{(a + Bd}{b}$$

$$\begin{aligned} B &= (\frac{b\bar{z}}{d\tau} - a)\frac{1}{d} + \frac{1}{b}(\frac{2b\bar{z}}{d\tau} - a - Bd)(\frac{a\tau}{\bar{z}} - \frac{b}{d}) \\ &= \frac{abd\tau\bar{z} - b^2\bar{z}^2 - a^2d^2\tau^2}{ad^3\tau^2} \end{aligned}$$

$$A_1 = A_2 = = \frac{ad\tau\bar{z} + b\bar{z}^2}{ad^2\tau^2}$$

Jeg får følgende mulig løsning med $p_x(T) > 0$, $x(T) = 0$ og gitt at $\bar{q} \leq p_x(t)$

$$\alpha = \begin{cases} 1 & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$q(t) = \begin{cases} \frac{a\bar{z}}{dx_0 + b\bar{z}} & t \in [0, \tau) \\ \bar{q} & t \in [\tau, T] \end{cases}, \qquad u(t) = \begin{cases} \frac{adx_0}{dx_0 + b\bar{z}} & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} x_0 - \frac{adx_0}{dx_0 + b\bar{z}} t & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}, \quad z(t) = \begin{cases} \frac{ad\bar{z}}{\tau} t & t \in [0, \tau) \\ d\bar{q}\left(t - \frac{x_0 + \frac{b\bar{z}}{d}}{a}\right) + \bar{z} & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$p_x(t) = \frac{adx_0\bar{z} + 2ab\bar{z}^2}{(dx_0 + b\bar{z})^2} \geq \bar{q} \qquad t \in [0, T]$$

$$p_z(t) = \begin{cases} \frac{bdx_0\bar{z} - (dx_0 + b\bar{z})^2}{\frac{a}{d}((dx_0 + b\bar{z})^2} & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$\tau = \frac{dx_0 + b\bar{z}}{ad}, \qquad T \geq \frac{dx_0 + b\bar{z}}{ad}$$

(I tilfellene med tømt reservoar, $x(T) = 0$, har jeg antatt at $p_0 = 1$.)

3.2 Optimal løsning

Siden $f_{0_\phi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ er konkav og $\mathbf{f}_\phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ er lineær, er konkavitetsbetingelsen for problemet tilfredsstilt. Tilstandsvariabelen $x(t)$ er en begrenset mengde ($x(t) \leq x_0$) og oppfyller kravet for alle tillatte $x(t)$. $z(t)$ er en funksjon av prisen $q(t)$ som har skranken $q < a/b$, dermed er kravet for $z(t)$ også oppfylt. Kontrollregionen $U = [0, \tilde{u}]$ er lukket og begrenset. Til slutt trenger vi å oppfylle betingelsen som sikrer at $z(t)$ krysser grensen $\bar{z}$ slik (NT) - betingelsen krever, slik at eksistensteoremet sikrer at det finnes en optimal løsning. Med kontrollregionen $U = [0, \tilde{u}]$ medfører at ikke alle løsningene har en slik krysning for $z(t)$. Dette ble vist i tilfelle (II) $(p_x(T) > 0, x(T) = 0$ og $\bar{q} \leq p_x(t))$, hvor $z(t)$ ble liggende på grensen. Denne betingelsen kan tilfredsstilles med en kontrollregion $U = [\epsilon, \tilde{u}]$ for en $\epsilon > 0$. Så kan en la $\epsilon \to 0$ og da får vi løsningene ovenfor.

Siden forslagene for optimale løsninger overlapper hverandre har vi ingen entydige løsninger for optimalitet. For å vise optimale løninger her må vi sette opp verdifunksjonene for de ulike forslagene og vurdere kandidatene. Ettersom modellen er fullstendig gerneralisert og inneholder mange ukjente konstanter, vil jeg unnlate å gjøre det. Vi kan derimot fastslå at for en kort og lang tidshorisont (for henholdsvis tilfelle (I) og (II) med $x(T) = 0, p_x(T) > 0$ og $\bar{q} \leq p_x(t))$ har vi to entydige løsninger og som tilfredsstiller optimalitetskriteriene.

En økonomisk tolkning av analysen

En pris- og utvinngingsstrategi for oljeselskapet i tilfellet hvor det ikke finner det å være lønnsomt å utvinne all oljen fra oljefeltet, for eksempel ved et stort oljefelt med en kortere periode for oljeselskapet, er den optimale monopolistprisen lik $\sqrt{b\bar{q}\tilde{u}}/b$. Med denne prisen har monopolisten en tidshorisont $T \leq \bar{z}\sqrt{b/\bar{q}\tilde{u}}/d$. Hvis monopolisten har en tidshorisont større enn $\bar{z}\sqrt{b/\bar{q}\tilde{u}}/d$, får vi en oppstart i prosessen backstop teknologi siden den gjennomsnittlige prisen overskrider prisgrensen. Dette medfører at vi får et skift i pris og markedsposisjon. Den optimale utvinningsraten for selskapet etter tidspunktet τ er lik $\tilde{u}$, unntatt i det siste tilfellet hvor det ikke er lønnsomt å fortsette produksjonen.

For monopolisten vil det være interessant å vurdere prisene i de ulike tilfellene. Ser vi på tilfellet hvor oljereservene ikke brukes opp, er verdien på $p_z(t) = \frac{1}{d}(\sqrt{b\bar{q}\tilde{u}} - a)$ negativ (eller lik null). Dette medfører at oljeprisen i modellen med backstop teknologi er lavere (eller lik) enn oljeprisen i modellen uten backstop teknologi:

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{b\bar{q}\tilde{u}}}{b} &\leq \frac{a}{2b} \\
b\bar{q}(a-b\bar{q}) &\overset{\Uparrow}{\leq} \frac{a^2}{4} \\
-\frac{a^2}{4} + ab\bar{q} - b^2\bar{q}^2 &\overset{\Uparrow}{\leq} 0 \\
-(a-2b\bar{q})^2 &\overset{\Uparrow}{\leq} 0
\end{aligned}
$$

Her er $(a - b\bar{q})$ innsatt for $\tilde{u}$, som er mindre enn $(a - b\bar{q})$. Siden vi har gjeldende prisforhold medfører det at utvinningsraten i modellen med backstop teknologi er høyere (eller lik) enn utvinningsraten i modellen uten backstop teknologi.

I denne modellen ser vi på en oljepris som en mekanisme for en oppstartprosess i backstop teknologi, som resulterer at investorene kommer bedre ut. I en annen sammenheng hvor trusselen for oppstart i backstop teknologi er kvantumet oljeproduserentene tilbyr markedet (flere tilbydere). Produsentene øker sitt kvantum slik at teknologiprosessen utsettes. En slik problemformulering drøftes i en artikkel av Gerlagh og Liski (2007), *Strategic oil dependence*.

4 Modell 2. Økonomisk vekst med naturressurs

I denne modellen og i modell 3 tar jeg for meg økonomiske vekstmodeller med negative eksterne virkninger. Aktører i markeder blir belastet for sin produksjon etter overskredne grenser med endrede kostnadsfunksjoner. Som produsent må man ta hensyn til slike endringer under maksimering av produksjonen. Bedrifter som utnytter naturressurser og/eller forurenser miljøet utover tillatte nivåer risikerer å belage seg økte kostnader i form av avgifter, rensing eller kjøp av utslippskvoter. Veksten av negative virkninger, $y(t)$, er proporsjonal med produksjonen eller kapitalbeholdningen i bedriftene, slik at når de overstiger en bestemt grense, $\bar{y}$, vil bedriftene få et sprang kostnadsfunksjonen. Grensene er bestemt av produktfunksjonen eller av kapitalbeholdningen. Kostnadsendringen er gitt ved:

$$\alpha = \begin{cases} 2 & \text{hvis } y(t) < \bar{y} \\ 1 & \text{hvis } y(t) \geq \bar{y} \end{cases}$$

Den første modellen[9] angår en produsent som benytter seg av en naturressurs, for eksempel fisk, skog eller beitemark, som ønsker å maksimere sin produksjon. Produktfunksjonen er $f(x) = \alpha x$ og $s = s(t)$ er investeringsraten (kontrollvariabelen, produsenten bestemmer selv hvor mye den ønsker å investere og setter sparing lik investering), og $(1 - s)$ er andelen som går til konsum. Kapitalbeholdningen betegnes av $x = x(t)$ (tilstandsvariabelen).

Veksten i utnyttelsen av naturressursen er en funksjon av kapitalbeholdningen $x(t)$. Hvis bedriften utnytter naturressursen over tillatte mengder under planperioden vil det medføre til endring i differensiallikningen og i integranden i kriteriet.

Bedriften står da ovenfor følgende maksimeringsproblem over tidsintervallet $[0, T]$:

$$\int_0^T (1 - s)\alpha x \ dt \qquad \alpha = \begin{cases} 2 & \text{hvis } y(t) < \bar{y} \\ 1 & \text{hvis } y(t) \geq \bar{y} \end{cases}$$

$$\dot{x} = \alpha s x, \quad x(0) = x_0 > 0, \quad x(T) \ fri, \quad s \in [0, 1]$$

$$\dot{y} = x, \quad y(0) = 0, \quad y(T) \ fri \quad \bar{y} > x_0 T$$

[9]Denne modellen er en variant av eksempel 4, s. 25 i Seierstad og Stabrun (2007)

4.1 Løsningsforslag

Hamilton-funksjonen (H):

$$H = p_0(1-s)\alpha x + p_x\alpha s x + p_y x$$

Siden endebetingelsene er $x(T) fri$ og $z(T) fri$ og får tilhørende transversalitetetsbetingelsenr $p_x(T) = 0$ og $p_y(T) = 0$ må $p_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow H &= (1-s)\alpha x + p_x\alpha s x + p_2 x \\
&= \alpha x - \alpha s x + p_x \alpha s x + p_2 x \\
&= \alpha x + s(p_x - 1)\alpha x + p_2 x
\end{aligned}$$

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } p_x > 1 \\ 0 & \text{hvis } p_x < 1 \end{cases}$$

(med $p_x = 1$ blir ikke $s(t)$ bestemt)

$$\begin{aligned}
\dot{p}_x = -H_x^{'} &= -\big(\alpha - \alpha s + p_x \alpha s + p_y\big) \\
&= -\alpha + \alpha s - p_x \alpha s - p_y
\end{aligned}$$

$$\dot{p}_y = -H_y^{'} = -(0) = 0$$

$$p_y(t) = A, \qquad p_y(T) = 0 \Leftrightarrow p_y(T) = A = 0 \quad \Rightarrow \quad p_y(t) = 0$$

$$\dot{p}_x = \begin{cases} -ap_x - A & \text{hvis } s = 1 \\ -\alpha - A & \text{hvis } s = 0 \end{cases}$$

$$\dot{p}_x = \begin{cases} -ap_x & \text{hvis } s = 1 \\ -\alpha & \text{hvis } s = 0 \end{cases}$$

$\dot{p}_x = -ap_x(t) < 0$ hvis $s = 1$ (da er $p_x(t) \geq 1$) og $\dot{p}_x = -a$ hvis $s = 0$, er $\dot{p}_x < 0$ i begge tilfeller, dermed er $p_x(t)$ strengt avtakende.

$$p_x(t) = \begin{cases} Be^{-\alpha t} - \frac{A}{\alpha} & > 1 & \text{hvis } s = 1 \\ -\alpha t - At + G & < 1 & \text{hvis } s = 0 \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{cases} \alpha x & \text{hvis } s = 1 \\ 0 & \text{hvis } s = 0 \end{cases}, \qquad x(t) = \begin{cases} Ce^{\alpha t} & \text{hvis } s = 1 \\ D & \text{hvis } s = 0 \end{cases}$$

$$\dot{y} = \begin{cases} Ce^{\alpha t} & \text{hvis } s = 1 \\ D & \text{hvis } s = 0 \end{cases}, \qquad y(t) = \begin{cases} \frac{C}{\alpha}e^{\alpha t} & \text{hvis } s = 1 \\ Dt + F & \text{hvis } s = 0 \end{cases}$$

Tilfelle (I)

Anta at $p_x > 1 \quad \forall \ t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow p_x(t) = Be^{-\alpha t} \\ &\quad p_x(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_x(T) = Be^{\alpha T} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = 0 \\ &\Rightarrow p_x(t) = 0 \qquad \text{motsigelse} \end{aligned}$$

Tilfelle (II)

Undersøker med $p_x(t) < 1 \quad \forall \ t \in [0, T]$
$\Rightarrow \quad s = 0, t \in [0, T]$
$\Rightarrow \quad x(t) = D, \Rightarrow \quad x(0) = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = D = x_0$
$x(t) = x_0, \quad t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} y(t) &= Dt + F \\ y(0) &= 0 \quad \Rightarrow \quad y(0) = F = 0 \\ y(t) &= Dt = x_0 t \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& y(T) = x_0 T \qquad \Rightarrow \text{Dermed krysser ikke } y(t) \text{ grensen.} \\
\Rightarrow \quad & \alpha = 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_y(t) &= A \qquad\qquad p_y(T) = 0 \\
p_y(t) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_x(t) &= 2t + G \qquad\qquad p_x(T) = 0 \\
p_x(t) &= 2(T - t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_x(t) = 2T - 2t &< 1 \\
T &< t + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Med $T < \frac{1}{2}$ har jeg en mulig løsning:

$s(t) = 0, \;\; x(t) = x_0, \;\; y(t) = x_0 t, \;\; p_x(t) = 2(T - t), \;\; p_y(t) = 0$

For $T > \frac{1}{2}$ vil det finnes en $t^* \in (0, T)$ slik at:

$$
p_x(t) = \begin{cases} > 1 & \text{hvis } t \in [0, t^*) \\ < 1 & \text{hvis } t \in [t^*, T] \end{cases}
$$

Tilfelle (III)

Undersøker med $T > \frac{1}{2}$ der $y(t) \leq \bar{y} \quad \forall \; t$. Siden problemet løses med hensyn på $y(t) \leq \bar{y}$ rammes ikke den adjungerte funksjonen av problemet diskontinuitet.

$$s(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, t^*) \\ 0 & t \in (t^*, T] \end{cases}, \qquad \alpha = 2, \quad t \in [0, T]$$

$$x(t) = \begin{cases} Ce^{2t} & t \in [0, t^*) \\ D & t \in (t^*, T] \end{cases}, \quad y(t) = \begin{cases} \frac{C}{2}e^{2t} & t \in [0, t^*) \\ Dt + F & t \in (t^*, T] \end{cases}$$

$$p_x(t) = \begin{cases} Be^{-2t} & t \in [0, t^*) \\ 2(T - t) & t \in (t^*, T] \end{cases}, \qquad p_y(t) = 0, \quad t \in [0, T]$$

$$\begin{aligned} & x(t) = Ce^{2t}, \quad \Rightarrow \quad x(0) = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = C = x_0 \\ & x(t) = x_0 e^{2t}, \quad t \in [0, t^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t_-^*) = x(t_+^*) \quad &\Leftrightarrow \quad x_0 e^{2t^*} = D \\ x(t) = x_0 e^{2t^*}, &\quad t \in (t^*, T] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{x_0}{2} + E = 0, \quad \Leftrightarrow \quad E = -\frac{x_0}{2} \\ y(t) &= \frac{x_0}{2}e^{2t} - \frac{x_0}{2}, \quad t \in [0, t^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t_-^*) = y(t_+^*) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x_0}{2}e^{2t} - \frac{x_0}{2} = t^* x_0 e^{2t^*} + F \\ F &= (\frac{1}{2} - t^*) x_0 e^{2t^*} - \frac{x_0}{2} \\ y(t) &= (t + \frac{1}{2} - t_*) x_0 e^{2t^*} - \frac{x_0}{2}, \quad t \in (t^*, T] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_x(t_-^*) &= p_x(t_+^*) = 1 \\ p_x(t_-^*) &= Be^{-2t^*} = 1 \\ B &= e^{2t^*} \\ p_x(t) &= e^{2(t^* - t)} \quad t \in [0, t^*) \end{aligned}$$

$$p_x(t^*_+) = 2(T - t^*)$$
$$t^*) = T - \frac{1}{2}$$
$$p_x(t) = 2(T - t) \quad t \in (t^*, T]$$

Siden det løses med $y(t) \leq \bar{y} \ \forall \ t$:

$$\begin{aligned}
y(T) = (T + \frac{1}{2} - t_*)x_0 e^{2t^*} - \frac{x_0}{2} &\leq \bar{y} \\
(T + \frac{1}{2} - T + \frac{1}{2})x_0 e^{2T-1} - \frac{x_0}{2} &\leq \bar{y} \\
x_0 e^{2T-1} - \frac{x_0}{2} &\leq \bar{y} \\
T &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} ln\left(\frac{2\bar{y} + x_0}{2x_0}\right)
\end{aligned}$$

En mulig løsning på problemet med $T < \frac{1}{2}$ og $y(t) \leq \bar{y} \ \forall \ t$ er gitt ved:

$$s(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T - \frac{1}{2}) \\ 0 & t \in (T - \frac{1}{2}, T] \end{cases}, \qquad \alpha = 2, \quad t \in [0, T]$$

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{2t} & t \in [0, T - \frac{1}{2}) \\ x_0 e^{2T-1} & t \in (T - \frac{1}{2}, T] \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{x_0}{2} e^{2t} - \frac{x_0}{2} & t \in [0, T - \frac{1}{2}) \\ (t + 1 - T)x_0 e^{2T-1} - \frac{x_0}{2} & t \in (T - \frac{1}{2}, T] \end{cases}$$

$$p_x(t) = \begin{cases} e^{2(T - \frac{1}{2} - t)} & t \in [0, T - \frac{1}{2}) \\ 2(T - t) & t \in (T - \frac{1}{2}, T] \end{cases}, \qquad p_y(t) = 0, \quad t \in [0, T]$$

$$t^* = T - \frac{1}{2} \qquad T \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} ln\left(\frac{2\bar{y} + x_0}{2x_0}\right)\right]$$

Tilfelle (IV)

For å undersøke i tilfellet hvor $y(t)$ krysser grensen $\bar{y}$ må $T \geq 1/2 + 1/2ln((2\bar{y} + x_0)/2x_0)$. Siden $x(t)$ og dermed $y(t)$ er kontinurlige og $y(t)$ strengt voksende for alle $t \in (0, T]$, vil $y(t)$ krysse $\bar{y}$ en gang i $t \in (0, T)$. Dette medfører at (NT) betingelsen er oppfylt. På krysningspunktet, $t = \tau$, får den adjungerte funksjonen, $p_y(t)$, et sprang.

Undersøker for $\tau \in [0, t^*)$:

$$s(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, t^*) \\ 0 & t \in (t^*, T] \end{cases}, \qquad \alpha = \begin{cases} 2 & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} C_1 e^{2t} & t \in [0, \tau) \\ C_1 e^{t} & t \in [\tau, t^*) \\ D & t \in (t^*, T] \end{cases}, \quad y(t) = \begin{cases} \frac{C_1}{2} e^{2t} + E_1 & t \in [0, \tau) \\ C_2 e^{t} + E_2 & t \in [\tau, t^*) \\ Dt + F & t \in (t^*, T] \end{cases}$$

$$p_x(t) = \begin{cases} B_1 e^{-2t} - \frac{A}{2} & t \in [0, \tau) \\ B_2 e^{-t} & t \in [\tau, t^*) \\ T - t & t \in [t^*, T] \end{cases}, \qquad p_y(t) = \begin{cases} A & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [t^*, T] \end{cases}$$

$$x(0) = x_0, \quad \Rightarrow \quad x(0) = C_1 = x_0$$
$$x(t) = x_0 e^{2t}, \quad t \in [0, t^*)$$

$$x(\tau_-) = x(\tau_+) \quad \Rightarrow \quad x_0 e^{2\tau} = C_2 e^{\tau}$$
$$x(t) = x_0 e^{t+\tau}, \quad t \in [\tau, t^*)$$

$$x(t^*_-) = x(t^*_+) \quad \Rightarrow \quad x_0 e^{t^*+\tau} = D$$
$$x(t) = x_0 e^{t^*+\tau}, \quad t \in (t^*, T]$$

$$y(0) = 0, \quad \Rightarrow \quad y(0) = \frac{x_0}{2} + E_1 = 0, \quad \Leftrightarrow \quad E_1 = -\frac{x_0}{2}$$
$$y(t) = \frac{x_0}{2} e^{2t} - \frac{x_0}{2}, \quad t \in [0, \tau)$$

$$
\begin{aligned}
y(\tau_-) = y(\tau_+) \quad &\Rightarrow \quad \frac{x_0}{2}e^{2\tau} - \frac{x_0}{2} = x_0 e^{\tau+\tau} + E_2 \\
\Leftrightarrow \quad E_2 &= -\frac{x_0}{2}e^{2\tau} - \frac{x_0}{2} \\
y(t) &= x_0 e^{\tau+t} - \frac{x_0}{2}e^{2\tau} - \frac{x_0}{2}, \quad t \in [\tau, t^*)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(t^*_-) = y(t^*_+) \quad &\Rightarrow \quad x_0 e^{\tau+t^*} - \frac{x_0}{2}e^{2\tau} + 1 = t^* x_0 e^{\tau+t^*} + F \\
F &= (1+t^*)x_0 e^{\tau+t^*} - \frac{x_0}{2}(e^{2\tau}+1) \\
y(t) &= (t+1-t^*)x_0 e^{\tau+t^*} - \frac{x_0}{2}(e^{2\tau}+1), \quad t \in (t^*, T]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(\tau_-) = y(\tau_+) &= \bar{y} \\
\frac{x_0}{2}e^{2t} - \frac{x_0}{2} &= \bar{y} \\
\tau &= \frac{1}{2}ln\left(\frac{2\bar{y}+x_0}{x_0}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_x(t^*_-) = p_x(t^*_+) \quad &\Rightarrow \quad B_2 e^{-t^*} = T - t^* \quad \Leftrightarrow \quad B_2 \quad = (T-t^*)e^{t^*} \\
p_x(t) &= (T-t^*)e^{t^*-t} \quad t \in [\tau, t^*)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_x(t^*_+) &= 1 \\
t^* &= T-1
\end{aligned}
$$

Bruker diskontuitetsbetingelsene for å finne A og B_1, med skranken definert som $\phi(t, x(t)) = y(t) - \bar{y}$, ((NT) betingelsen er oppfylt).

$$
\begin{aligned}
&[\phi_t(\tau, x^*(\tau-)) + \phi_x(\tau, x^*(\tau-))f(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-))]\mu_i \\
&+ \phi_x(\tau, x^*(\tau-)) = 0
\end{aligned}
$$

$$\left[0 + \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2x_0e^{2\tau}\\ x_0e^{2\tau}\end{bmatrix}\right]\mu_1 + 0 = 0$$
$$\mu_1 = 0$$

$$\left[0 + \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2x_0e^{2\tau}\\ x_0e^{2\tau}\end{bmatrix}\right]\mu_2 + 1 = 0$$
$$\mu_2 = -\frac{1}{x_0e^{2\tau}}$$

$$\begin{aligned}p(\tau-) - p(\tau+) = p_0[f_0(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-)) - f_0(\tau, x^*(\tau+), u^*(\tau+))]\boldsymbol{\mu}\\ +[p(\tau+)f(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-)) - p(\tau+)f(\tau, x^*(\tau+), u^*(\tau+))]\boldsymbol{\mu}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}B_1e^{-2\tau} - \frac{A}{2}\\ A\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}e^{t^*-\tau}\\ 0\end{bmatrix} &= 1\big(0-0\big)\begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{x_0e^{2\tau}}\end{bmatrix}\\ &+ \left[\begin{bmatrix}e^{t^*-t} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2x_0e^{2\tau}\\ x_0e^{2\tau}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}e^{t^*-t} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0e^{2\tau}\\ x_0e^{2\tau}\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{x_0e^{2\tau}}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}B_1e^{-2\tau} - \frac{A}{2}\\ A\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}e^{t^*-\tau}\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_0e^{\tau+t^*}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{x_0e^{2\tau}}\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}B_1e^{-2\tau} - \frac{A}{2}\\ A\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}e^{t^*-\tau}\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ -e^{t^*-\tau}\end{bmatrix}$$

$$A = -e^{t^*-\tau}$$

$$B_1e^{-2\tau} + \frac{e^{t^*-\tau}}{2} = e^{t^*-\tau}$$
$$B_1 = \frac{e^{t^*+\tau}}{2}$$

$$p_x(t) = \frac{e^{t^*+\tau-2t}}{2} + \frac{e^{t^*-\tau}}{2} \quad t \in [0, \tau)$$

En mulig løsning på problemet med $y(t) > \bar{y}$ og $\tau \in [0, t^*)$ er gitt ved:

$$s(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T-1) \\ 0 & t \in (T-1, T] \end{cases}, \qquad \alpha = \begin{cases} 2 & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{2t} & t \in [0, \tau) \\ x_0 e^{\tau + t} & t \in [\tau, T-1) \\ x_0 e^{\tau + T - 1} & t \in (T-1, T] \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{x_0}{2} e^{2t} - \frac{x_0}{2} & t \in [0, \tau) \\ x_0 e^{\tau + t} - \frac{x_0}{2} e^{2\tau} - \frac{x_0}{2} & t \in [\tau, T-1) \\ (t + 2 - T) x_0 e^{\tau + T - 1} - \frac{x_0}{2}(e^{2\tau} + 1) & t \in (T-1, T] \end{cases}$$

$$p_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(e^{\tau + T - 1 - 2t} + e^{T - 1 - \tau}) & t \in [0, \tau) \\ e^{T-1-t} & t \in [\tau, T-1) \\ T - t & t \in [T-1, T] \end{cases}$$

$$p_y(t) = \begin{cases} -e^{T-1-\tau} & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$t^* = T - 1, \qquad \tau = \frac{1}{2} ln(\frac{2\bar{y} + x_0}{x_0}), \qquad T > 1 + \frac{1}{2} ln(\frac{2\bar{y} + x_0}{x_0})$$

Tilfelle (V)

Undersøker for $\tau = t^*$:

$$s(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in (\tau, T] \end{cases}, \qquad \alpha = \begin{cases} 2 & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} Ce^{2t} & t \in [0, \tau) \\ D & t \in (\tau, T] \end{cases}, \quad y(t) = \begin{cases} \frac{C}{2} e^{2t} & t \in [0, \tau) \\ Dt + F & t \in (\tau, T] \end{cases}$$

$$p_x(t) = \begin{cases} Be^{-2t} - \frac{A}{2} & t \in [0, \tau) \\ T - t & t \in [\tau, T] \end{cases}, \qquad p_y(t) = \begin{cases} A & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x(0) = x_0, \quad &\Rightarrow \quad x(0) = C = x_0 \\ x(t) = x_0 e^{2t}, \quad &t \in [0, \tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(\tau_-) = x(\tau_+) \quad &\Rightarrow \quad x_0 e^{2\tau} = D \\ x(t) = x_0 e^{2\tau}, \quad &t \in (\tau, T] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &y(0) = 0, \quad \Rightarrow \quad y(0) = \frac{x_0}{2} + E = 0, \quad \Leftrightarrow \quad E = -\frac{x_0}{2} \\ &y(t) = \frac{x_0}{2} e^{2t} - \frac{x_0}{2}, \quad t \in [0, \tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(\tau_-) = y(\tau_+) \quad &\Rightarrow \quad \frac{x_0}{2} e^{2\tau} - \frac{x_0}{2} = \tau x_0 e^{2\tau} + F \\ F &= (\frac{1}{2} - \tau) x_0 e^{2\tau} - \frac{x_0}{2} \\ y(t) &= (t + \frac{1}{2} - \tau) x_0 e^{2\tau} - \frac{x_0}{2}, \quad t \in (\tau, T] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(\tau_-) = (\tau + \frac{1}{2} - \tau) = \bar{y} \\ e^{2\tau} &= \frac{2\bar{y} + x_0}{x_0} \\ \tau &= \frac{1}{2} ln(\frac{2\bar{y} + x_0}{x_0}) \end{aligned}$$

Bruker diskontuitetsbetingelsene for å finne A og B, med skranken definert som $\phi(t, x(t)) = y(t) - \bar{y}$, ((NT) betingelsen er oppfylt).

$$\begin{aligned} &[\phi_t(\tau, x^*(\tau-)) + \phi_x(\tau, x^*(\tau-)) f(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-))]\mu_i \\ &+ \phi_x(\tau, x^*(\tau-)) = 0 \end{aligned}$$

$$\left[0 + \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2x_0e^{2\tau}\\ x_0e^{2\tau}\end{bmatrix}\right]\mu_1 + 0 = 0$$
$$\mu_1 = 0$$

$$\left[0 + \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2x_0e^{2\tau}\\ x_0e^{2\tau}\end{bmatrix}\right]\mu_2 + 1 = 0$$
$$\mu_2 = -\frac{1}{x_0e^{2\tau}}$$

$$\begin{aligned}p(\tau-) - p(\tau+) = p_0[f_0(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-)) - f_0(\tau, x^*(\tau+), u^*(\tau+))]\boldsymbol{\mu}\\ +[p(\tau+)f(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-)) - p(\tau+)f(\tau, x^*(\tau+), u^*(\tau+))]\boldsymbol{\mu}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}Be^{-2\tau} - \frac{A}{2}\\ A\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}T-\tau\\ 0\end{bmatrix} = 1\big(0 - x_0e^{2\tau}\big)\begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{x_0e^{2\tau}}\end{bmatrix}\\ +\left[\begin{bmatrix}T-\tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2x_0e^{2\tau}\\ x_0e^{2\tau}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}T-\tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ x_0e^{2\tau}\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{x_0e^{2\tau}}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}Be^{-2\tau} - \frac{A}{2}\\ A\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}T-\tau\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} + \left[\begin{bmatrix}T-\tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2x_0e^{2\tau}\\ 0\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{x_0e^{2\tau}}\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}Be^{-2\tau} - \frac{A}{2}\\ A\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}T-\tau\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ -2(T-\tau)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$
$$A = 1 - 2(T-\tau)$$

$$Be^{-2\tau}\,\frac{1-2(T-\tau)}{2} = T - \tau$$
$$B = \frac{1}{2}e^{2\tau}$$

Som det vises ovenfor får ikke $p_x(t)$ et sprang i diskontinuitetspunktet, men $p_y(t)$ får det.

$$p_x(t) = \frac{1}{2}e^{2(\tau - t)} + T - \tau\frac{1}{2} \quad t \in [0, \tau)$$

En mulig løsning på problemet med $y(t) > \bar{y}$ og $\tau = t^*$ er gitt ved:

$$s(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in (\tau, T] \end{cases}, \qquad \alpha = \begin{cases} 2 & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{2t} & t \in [0, \tau) \\ x_0 e^{2\tau} & t \in [\tau, T) \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{x_0}{2}e^{2t} - \frac{x_0}{2} & t \in [0, \tau) \\ (t + \frac{1}{2} - T)x_0 e^{2\tau} - \frac{x_0}{2} & t \in (\tau, T] \end{cases}$$

$$p_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(e^{2\tau - t} + T - \tau\frac{1}{2} & t \in [0, \tau) \\ T - t & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$p_y(t) = \begin{cases} 1 - 2(T - \tau) & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$\tau = t^* = \frac{1}{2}ln(\frac{2\bar{y} + x_0}{x_0}), \qquad T = 1 + \frac{1}{2}ln(\frac{2\bar{y} + x_0}{x_0})$$

Tilfelle (VI)

Undersøker for $\tau \in (t^*, T]$:

$$s(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, t^*) \\ 0 & t \in (t^*, T] \end{cases}, \qquad \alpha = \begin{cases} 2 & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} Ce^{2t} & t \in [0, t^*) \\ D & t \in (t^*, T] \end{cases}, \quad y(t) = \begin{cases} \frac{C}{2}e^{2t} + E & t \in [0, t^*) \\ Dt + F & t \in (t^*, T] \end{cases}$$

$$p_x(t) = \begin{cases} Be^{-2t} - \frac{A}{2} & t \in [0, t^*) \\ -2t - At + G & t \in (t^*, \tau) \\ T - t & t \in [\tau, T] \end{cases}, \qquad p_y(t) = \begin{cases} A & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$x(0) = x_0, \quad \Rightarrow \quad x(0) = C = x_0$$
$$x(t) = x_0 e^{2t}, \quad t \in [0, t^*)$$

$$x(t^*_-) = x(t^*_+) \quad \Rightarrow \quad x_0 e^{2t^*} = D$$
$$x(t) = x_0 e^{2t^*}, \quad t \in (t^*, T]$$

$$y(0) = 0, \quad \Rightarrow \quad y(0) = \frac{x_0}{2} + E = 0, \quad \Leftrightarrow \quad E = -\frac{x_0}{2}$$
$$y(t) = \frac{x_0}{2} e^{2t} - \frac{x_0}{2}, \quad t \in [0, t^*)$$

$$y(t^*_-) = y(t^*_+) \ \Rightarrow \ \frac{x_0}{2} e^{2t^*} - \frac{x_0}{2} = t^* x_0 e^{2t^*} + F \ \Leftrightarrow \ F \ = \frac{x_0}{2} e^{2t^*} (\frac{1}{2} - t^*) - \frac{x_0}{2}$$
$$y(t) = (t + \frac{1}{2} - t^*) x_0 e^{t^*} - \frac{x_0}{2}, \quad t \in (t^*), T]$$

Når $y(t)$ er på grensen $\bar{y}$, $t = \tau, \quad \Rightarrow \quad y(t) = \bar{y}$.

$$y(\tau) = (t + \frac{1}{2} - t^*) x_0 e^{t^*} - \frac{x_0}{2}, = \bar{y}$$
$$t + \frac{1}{2} - t^*, = \frac{2\bar{y} + x_0}{2x_0} e^{-2t^*}$$
$$\tau = t^* - \frac{1}{2} + \frac{2\bar{y} + x_0}{2x_0} e^{-2t^*}$$

$$p_x(t^*_-) = p_x(t^*_+) = 1$$
$$p_x(t^*_-) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad B e^{-2t^*} - \frac{A}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad B = \frac{2 + A}{2} e^{2t^*}$$
$$p_x(t) = \frac{2 + A}{2} e^{2(t^* - t)} - \frac{A}{2} \quad t \in [0, t^*)$$

$$p_x(t^*_+) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2t^* - At^* + G = 1 \quad \Leftrightarrow \quad G = t^*(2 + A) + 1$$
$$p_x(t) = (t^* - t)(2 + A) + 1 \quad t \in (t^*, \tau)$$

Bruker diskontuitetsbetingelsene for å finne A og t^*, med skranken definert som $\phi(t, x(t)) = y(t) - \bar{y}$, ((NT) betingelsen er oppfylt).

$$\begin{aligned}&[\phi_t(\tau, x^*(\tau-)) + \phi_x(\tau, x^*(\tau-)) f(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-))]\mu_i \\ &+ \phi_x(\tau, x^*(\tau-)) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[0 + \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ x_0 e^{2t^*}\end{bmatrix}\right]\mu_1 + 0 &= 0 \\ \mu_1 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[0 + \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ x_0 e^{2t^*}\end{bmatrix}\right]\mu_2 + 1 &= 0 \\ \mu_2 &= -\frac{1}{x_0 e^{2t^*}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p(\tau-) - p(\tau+) = {}& p_0[f_0(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-)) - f_0(\tau, x^*(\tau+), u^*(\tau+))]\boldsymbol{\mu} \\ &+[p(\tau+) f(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-)) - p(\tau+) f(\tau, x^*(\tau+), u^*(\tau+))]\boldsymbol{\mu}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}(t^* - \tau)(2 + A) + 1 \\ A\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}T - \tau \\ 0\end{bmatrix} = {}& 1\left(2x_0 e^{2t^*} - x_0 e^{2t^*}\right)\begin{bmatrix}0 \\ -\frac{1}{x_0 e^{2t^*}}\end{bmatrix} \\ &+ \left[\begin{bmatrix}T - \tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ x_0 e^{2t^*}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}T - \tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ x_0 e^{2t^*}\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}0 \\ -\frac{1}{x_0 e^{2t^*}}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}(t^* - \tau)(2 + A) + 1 \\ A\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}T - \tau \\ 0\end{bmatrix} = {}& \begin{bmatrix}0 \\ -1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$A = -1$$

$$\begin{aligned}(t^* - \tau)(2 + (-1)) + 1 &= T - \tau \\ t^* &= T - 1\end{aligned}$$

En mulig løsning på problemet med $y(t) > \bar{y}$ og $\tau \in (t^*, T)$ er gitt ved:

$$s(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T-1) \\ 0 & t \in (T-1, T] \end{cases}, \qquad \alpha = \begin{cases} 2 & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{2t} & t \in [0, \tau) \\ x_0 e^{2(T-1)} & t \in (T-1, T] \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{x_0}{2} e^{2t} - \frac{x_0}{2} & t \in [0, T-1) \\ (t + \frac{1}{2} - t^*) x_0 e^{t^*} - \frac{x_0}{2} & t \in (T-1, T] \end{cases}$$

$$p_x(t) = \begin{cases} e^{2(T-1-t)} & t \in [0, T-1) \\ T-t & t \in (T-1, \tau) \\ T-t & t \in (\tau, T] \end{cases}, \qquad p_y(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$t^* = T - 1, \qquad \tau = T - \frac{3}{2} + \frac{2\bar{y} + x_0}{2x_0} e^{-2T+2}$$

$$T \in \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} ln(\frac{2\bar{y} + x_0}{2x_0}), 1 + \frac{1}{2} ln(\frac{2\bar{y} + x_0}{x_0}) \right)$$

4.2 Optimal løsning

I dette kontrollproblemet har vi at kontrollregionen $U = [0, 1]$ er lukket og begrenset, og alle tillatte $x(t)$ og $y(t)$ er begrensede mengder. Videre har vi oppfylt konveksitetsbetingelsen ved at $f_{0_\phi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ og $\mathbf{f}_\phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ er lineære. Når $x(t)$ er voksende og positiv over hele intervallet $[0, T]$ og siden $y(t) = tx(t)$, er $y(t)$ strengt voksende i $(0, T]$ og dermed sikrer vi at $y(t)$ krysser grensen slik (NT)-betingelsen krever. Med følgende betingelser oppfylt sikrer eksistensteoremet at det finnes en optimal løsning. For en gitt tidshorisont har vi bare ett forslag og kan dermed konkludere med at løsningene er optimale.

Endringsdynamikk

I tilfellene (IV) - (VI) får den adjungerte funksjonen $p_y(t)$ et sprang i krysningspunktet. Dette medfører at systemet får et negativt skift i sprangtidspunktet, (bedriften får en kostnadsøkning for overskridelse av grensen). Gitt at $(T - \tau) > 0,5$ i tilfellet (V) er verdien på $p_y(t)$ negativ i alle tilfellene. Som løsningene viser er $p_x(t)$ en funksjon av $p_y(t)$, slik at når $p_y(t)$ får et sprang, påvirkes også $p_x(t)$ av spranget. Dermed rammes $p_x(t)$ slik at den blir senket (mot t-aksen) i alle tilfellene.

En økonomisk tolkning av ananlysen

I tilfelle (III) vises optimal investeringsallokering for bedriften med bestemt tidsintervall på planperioden, hvor størrelsen på kapitalbeholdningen ikke krysser grensen. Hvis merkostnadene overstiger merinntektene etter krysningspunktet vil det være lite fristende for bedriften å fortsette sin virksomhet. I tilfellene (IV) - (VI) vises optimale investeringsallokeringer i alle tilfellene med krysningspunktet på planperioden. Hvis driften er lønnsom etter kostnadsøkningene, vil det være optimalt for bedriften å ha et investeringsforløp til optimumspunktet (t^*) uavhengig av τ, deretter la fortjenesten gå til utbytte ut perioden. Men i ekstreme tilfeller med kort tidshorisont vil det være optimalt å la hele fortjenesten gå til utbytte i hele planperioden. Dette viser jeg i tilfelle (II).

5 Modell 3. Økonomisk vekst med forurensing

I denne modellen beskrives en produsent som forurenser naturmiljøet. I økonomisk forstand har vi forurensing når utslippet av avfallsstoffer overskrider naturens (resipientens) selvrensingsevne. Ved utslipp utover et bestemt nivå til naturmiljøet av produsentene medfølger det økte kostnader i form av rensing eller kjøp av utslippskvoter. Forurensingen er gitt ved funksjonen $y(t)$ og utslippsnivået er gitt ved $\bar{y}$. Kostnadsendringen for produsenten er gitt ved:

$$\alpha = \begin{cases} 2 & \text{hvis } y(t) < \bar{y} \\ 1 & \text{hvis } y(t) \geq \bar{y} \end{cases}$$

Produsenten ønsker å maksimere sin produksjon over planperioden $[0, T]$. Pruduktfunksjonen er $f(x) = \alpha x$ og $u = u(t)$ er andelen som går til konsum (kontrollvariabelen) og $(1 - u)$ er investeringsraten. Kapitalbeholdningen betegnes ved $x = x(t)$ (tilstandsvariabelen).

Veksten i forurensning er en funksjon av produktfunksjonen $x(t)$. Hvis bedriften forurenser utover tillatt nivå under planperioden vil det medføre endring i differensiallikningen og i integranden i kriteriet.

Bedriften står da ovenfor følgende maksimeringsproblem over tidsintervallet $[0, T]$:

$$\int_0^T \sqrt{\alpha u x}\ dt \qquad\qquad \alpha = \begin{cases} 2 & \text{hvis } y(t) < \bar{y} \\ 1 & \text{hvis } y(t) \geq \bar{y} \end{cases}$$

$$\dot{x} = \alpha x(1 - u), \quad x(0) = x_0 > 0, \quad x(T)\ fri, \quad u \in [0, 1]$$

$$\dot{y} = \alpha x, \quad y(0) = 0, \quad y(T)\ fri$$

Forutsetter at: $2x_0 < \bar{y}$

5.1 Løsningsforslag

Hamilton-funksjonen (H):

$$H = p_0\sqrt{\alpha x u} + p_x \alpha x(1-u) + p_y \alpha x$$

Siden endebetingelsene er $x(T) fri$ og $z(T) fri$ og får tilhørende transversalitetetsbetingelsene $p_x(T) = 0$ og $p_y(T) = 0$ må $p_0 = 1$.

$$H = \sqrt{\alpha x u} + p_x \alpha x(1-u) + p_y \alpha x = \phi(u)$$

$$\phi^{'}(u) = H^{'}_u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha x}{u}} - p_x \alpha x$$
$$u^*(t) = \frac{1}{4p_x^2 \alpha x}$$

$$\dot{p}_x = -H^{'}_x = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha u}{x}} - p_x \alpha(1-u) - p_y \alpha \qquad , \qquad p_x(T) = 0$$

$$\dot{p}_y = -H^{'}_y = 0 \qquad , \qquad p_y(T) = 0$$

$$\begin{aligned}
u = u^*(t) = 0 \quad & \textit{maksimerer} \quad \phi(u) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{\alpha x(t) u(t)}} - p_x(t) \leq 0 \\
u = u^*(t) \in (0,1) \quad & \textit{maksimerer} \quad \phi(u) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{\alpha x(t) u(t)}} - p_x(t) = 0 \\
u = u^*(t) = 1 \quad & \textit{maksimerer} \quad \phi(u) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{\alpha x(t) u(t)}} - p_x(t) \geq 0
\end{aligned}$$

Definerer $\psi(s) = 1/2\sqrt{\alpha x(s) u(s)} - p_x(s)$ over intervallet $[0, T]$. Siden $p_x(T) = 0, \Rightarrow \psi(T) > 0$. La t^* være den minste t slik at $\psi(s) > 0$ for alle $s \in (t, T]$. Hvis $t^* = 0 \Rightarrow u = 1$ i $[0, T]$. Hvis $t^* > 0$, $\psi(t^*) = 0$ og $\psi(t) > 0$ for alle $t \in (t^*, T] \Rightarrow u = 1$ i $(t^*, T]$

$$\dot{p}_x = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{x}} - p_y\alpha \qquad , \qquad \dot{p}_y = 0$$

$$p_x(t) = -\frac{t}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{x}} - p_y\alpha t + A \qquad , \qquad p_y(t) = B$$

$$\dot{x} = 0 \qquad , \qquad x(t) = C$$

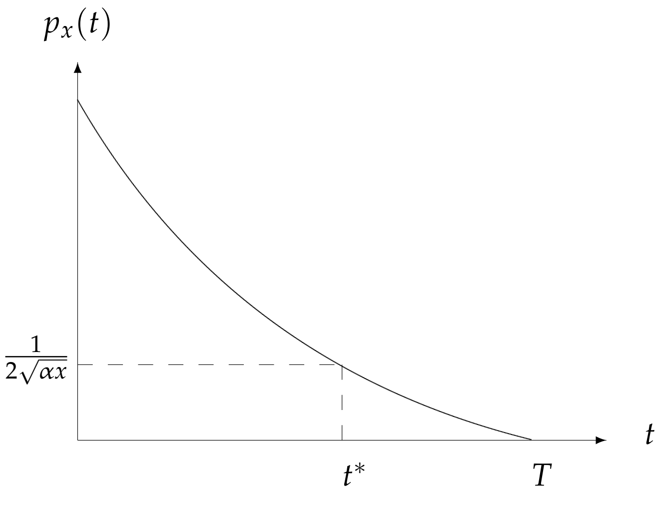
$$\dot{y} = \alpha C \qquad , \qquad y(t) = \alpha C t + D$$

La t_* være den største t slik at $\psi(s) < 0$ for alle $s \in [0, t)$, (siden $\dot{p}_x < 0$ og $p_x(t) > 0$ i $[0, T)$). Hvis $t_* = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0$ i $t = 0$, og $u \in (0, 1)$ U $u = 1$ i $(0, T]$. Hvis $t_* > 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0$ i $[0, t_*)$, $\psi(t_*) = 0$ og $\psi(t) < 0$ for alle $t \in [0, t^*)$.

Siden $\psi(s)$ ikke kan bli negativ når $u = 0$, må $t_* = 0$ når $u = 0$.

Slik at $u^*(t)$ blir:

$$u^*(t) = \begin{cases} \in [0, 1) & t \in [0, t^*) \\ 1 & t \in (t^*, T] \end{cases}$$



For $u^*(t) \in [0,1)$ i $[0,t^*)$ $\quad (\Rightarrow \quad p_x(t) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha x u}})$

$$\dot{p}_x = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha u}{x}} - p_x\alpha(1-u) - p_y\alpha \qquad , \qquad \dot{p}_y = 0$$

$$\dot{x} = \alpha x(1-u)$$

Tilfelle (I)

$p_x(t) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha x u}} \quad , \quad t \in [0,T]$

$\Rightarrow \quad$ umulig siden $p_x(T) = 0$

Tilfelle (II)

$p_x(t) < \frac{1}{2\sqrt{\alpha x u}} \quad , \quad t \in [0,T]$

$\Rightarrow \quad u^*(t) = 1$

$$\dot{x} = 0 \quad , \quad x(t) = C \;\; , \;\; x(0) = x_0 \;\; \Rightarrow \;\; x(t) = x_0$$

$$\dot{p}_y = 0 \;\; , \;\; p_y(t) = B \;\; , \;\; p_y(T) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; p_y(t) = 0$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_x = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{x}} - p_y\alpha \;\; , \;\; p_x(t) &= -t\frac{\alpha}{4x} - p_y\alpha t + A \\
p_x(t) = A - t\frac{\alpha}{4x} \;\; , \;\; p_x(T) &= 0 \;\; \Rightarrow \;\; A = T\frac{\alpha}{4x} \\
p_x(t) = (T-t)\frac{\alpha}{4x}
\end{aligned}$$

$$y(t)) = \alpha x_0 \quad < \bar{y} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2$$

$$\begin{aligned} p_x(t) &< \frac{1}{2\sqrt{2xu}} \\ (T-t)\frac{2}{4x} &< \frac{1}{2\sqrt{2xu}} \quad \Leftrightarrow \quad T - t < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Med $T < \frac{1}{2}$ har jeg en mulig løsning:

$u(t) = 1$, $x(t) = x_0$, $y(t) = 2x_0$ $p_x(t) = (T-t)\frac{1}{2x_0}$, $p_y(t) = 0$

For $T > \frac{1}{2}$, må: $\quad p_x(t) \begin{cases} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha x u}} & t \in [0, t^*) \\ < \frac{1}{2\sqrt{\alpha x}} & t \in (t^*, T] \end{cases}$

Tilfelle (III)

Undersøker med $T > \frac{1}{2}$ og uten at $y(t)$ krysser grensen $\bar{y}$, ($y(t) \leq \bar{y}$). Problemet rammes da ikke av diskontinuitet i den adjungerte funksjonen.

$$u^(t) = \begin{cases} u^* \in [0,1) & t \in [0, t^*) \\ 1 & t \in (t^*, T] \end{cases} \qquad \alpha = 2, \quad t \in [0, T]$$

$$\dot{p}_x = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha u}{x}} - p_x\alpha(1-u) - p_y\alpha & t \in [0, t^*) \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{x}} - p_y\alpha & t \in (t^*, T] \end{cases}$$

$$\dot{p}_y = 0, \quad t \in [0, T]$$

$$\dot{x} = \begin{cases} \alpha x(1-u) & t \in [0, t^*) \\ 0 & t \in (t^*, T] \end{cases}, \qquad \dot{y} = 2x \quad , \quad t \in [0, T]$$

Siden $x(t)$ er voksende, er $x(t^*_-) = x(t^*_+) = x_T \geq x_0$.

Siden $p_x(t)$ er kontinuerlig, $p_x(t^*_-) = p_x(t^*_+) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha x_T}}$

$$p_y(t) = B \ , \ p_y(T) = 0 \ \Rightarrow \ p_y(t) = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha u}{x}} - p_x \alpha (1-u) \\ \dot{p}_x &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{x}} \frac{1}{4p_x^2 \alpha x} - p_x \alpha (1 - \frac{1}{4p_x^2 \alpha x}) \\ \dot{p}_x &= -p_x \alpha \end{aligned}$$

$$p_x(t) = Ae^{-\alpha t}$$

$$\begin{aligned} p_x(t^*_-) &= \frac{1}{2\sqrt{\alpha x_T}} \quad \Rightarrow \quad Ae^{-\alpha t} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha x_T}} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{e^{2t^*}}{2\sqrt{2x_T}} \\ p_x(t) &= \frac{e^{2(t^*-t)}}{2\sqrt{2x_T}} \quad , \quad t \in [0, t^*) \end{aligned}$$

$$p_x(t) = (T-t)\frac{1}{\sqrt{2x_T}} \quad , \quad t \in (t^*, T]$$

$$\begin{aligned} p_x(t^*_-) &= p_x(t^*_+) \\ \frac{e^{2(t^*-t^*)}}{2\sqrt{2x_T}} &= (T-t^*)\frac{1}{\sqrt{2x_T}} \quad \Leftrightarrow \quad t^* = T - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_x(t) &= \frac{e^{2(t^*-t)}}{2\sqrt{2x_T}} \\
\frac{1}{2\sqrt{2xu}} &= \frac{e^{2(t^*-t)}}{2\sqrt{2x_T}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2x_T} = \sqrt{2xu}e^{2(t^*-t)} \quad \Leftrightarrow \quad 2xu = 2x_T e^{-4(t^*-t)} \\
2x - 2xu &= 2x - 2x_T e^{-4(t^*-t)} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x} = 2x - 2x_T e^{-4(t^*-t)} \\
\dot{x} - 2x &= -2x_T e^{4(t-t^*)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{2t}\left(C - 2x_T e^{-4t^*} \int e^{-2t} e^{4t} dt\right) \\
&= Ce^{2t} - x_T e^{4(t-t^*)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x(t) = x_0 \quad &\Rightarrow \quad C - x_T e^{-4t^*} = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad C = x_0 + x_T e^{-4t^*} \\
x^*(t) &= (x_0 + x_T e^{-4t^*})e^{2t} - x_T e^{4(t-t^*)} \\
&= x_0 e^{2t} + x_T(e^{2t} - e^{4t})e^{-4t^*} \quad , \quad t \in [0, t^*)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x(t^*_-) = x(t^*_+) &= x_T \\
x_0 e^{2t^*} + x_T(e^{2t^*} - e^{4t^*})e^{-4t^*} &= x_T \\
x_0 e^{2t^*} + x_T(e^{-2t^*} - 1) &= x_T \\
x_T &= \frac{x_0 e^{2t^*}}{2 - e^{-2t^*}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^*(t) &= x_0 e^{2t} + \frac{x_0 e^{2t^*}}{2 - e^{-2t^*}}(e^{2t} - e^{4t})e^{-4t^*} \\
&= \frac{x_0 e^{2t}(2 - e^{-2t^*}) + x_0 e^{-2t^*}(e^{2t} - e^{4t})}{2 - e^{-2t^*}} \\
&= \frac{x_0 e^{2t}(2 - e^{2(t-t^*)})}{2 - e^{-2t^*}} \quad , \quad t \in [0, t^*)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u^*(t) &= \frac{x_T}{x(t)} e^{-4(t^*-t)} \\
&= \frac{x_0 e^{2t^*} e^{-4(t^*-t)}}{x_0 e^{2t}(2 - e^{2(t-t^*)})} = \frac{e^{2(t-t^*)}}{2 - e^{2(t-t^*)}} \quad , \quad t \in [0, t^*)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= 2\int \frac{2x_0e^{2t} - x_0e^{4t-2t^*}}{2-e^{-2t^*}}\,dt \\
y(t) &= \frac{1}{2-e^{-2t^*}}\left(2x_0\int e^{2t}dt - x_0e^{-2t^*}\int e^{4t}dt\right) \\
y(t) &= \frac{1}{2-e^{-2t^*}}\left(x_0e^{2t} - \frac{1}{4}x_0e^{4t-2t^*}\right) + D_1 \\
y(t) &= \frac{2x_0e^{2t} - \frac{1}{2}x_0e^{4t-2t^*}}{2-e^{-2t^*}} + D_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad & \frac{2x_0 - \frac{1}{2}x_0e^{-2t^*}}{2-e^{-2t^*}} + D_1 = 0 \\
D_1 &= \frac{\frac{1}{2}x_0e^{-2t^*} - 2x_0}{2-e^{-2t^*}} \\
y(t) &= \frac{2x_0e^{2t} - \frac{1}{2}x_0e^{4t-2t^*}}{+}\frac{\frac{1}{2}x_0e^{-2t^*} - 2x_0}{2-e^{-2t^*}} \\
y(t) &= \frac{2x_0(e^{2t}-1) + \frac{1}{2}x_0e^{-2t^*}(1-e^{4t})}{2-e^{-2t^*}} \qquad , \quad t \in [0, t^*)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= 2\int \frac{x_0e^{2t^*}}{2-e^{-2t^*}}\,dt \\
&= 2t\frac{x_0e^{2t^*}}{2-e^{-2t^*}} + D_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& y(t^*_-) = y(t^*_+) \\
& \frac{2x_0(e^{2t^*}-1) + \frac{1}{2}x_0e^{-2t^*}(1-e^{4t^*})}{2-e^{-2t^*}} = 2t^*\frac{x_0e^{2t^*}}{2-e^{-2t^*}} + D_2 \\
& \frac{x_0e^{2t^*}(\frac{3}{2}-2t^*) + \frac{1}{2}x_0e^{-2t^*} - 2x_0}{2-e^{-2t^*}} = D_2 \\
& y(t) = \frac{x_0e^{2t^*}(\frac{3}{2}-2(t-t^*)) + \frac{1}{2}x_0e^{-2t^*} - 2x_0}{2-e^{-2t^*}} \qquad , \quad t \in (t^*, T]
\end{aligned}
$$

Med $y(t) \leq \bar{y} \ \forall \ t$, innebærer det at:

$$y(T) \leq \bar{y}$$
$$\frac{x_0 e^{2t^*}(\frac{3}{2} - 2(t-t^*)) + \frac{1}{2}x_0 e^{-2t^*} - 2x_0}{2 - e^{-2t^*}} \leq \bar{y}$$
$$T \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2(x_0 - \bar{y}) \pm \sqrt{4(x_0-\bar{y})^2 - 5(x_0+2\bar{y})}}{5}\right)$$
$$T \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2(x_0 - \bar{y}) + \sqrt{4(x_0-\bar{y})^2 - 5(x_0+2\bar{y})}}{5}\right)$$

En mulig løsning på problemet med $T > \frac{1}{2}$ og $y(t) \leq \bar{y} \ \forall \ t$ er gitt ved:

$$u(t) = \begin{cases} \frac{e^{2(t-t^*)}}{2-e^{2(t-t^*)}} & t \in [0, T-\frac{1}{2}) \\ 1 & t \in (T-\frac{1}{2}, T] \end{cases}, \qquad \alpha = 2, \quad t \in [0, T]$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{x_0 e^{2t}(2-e^{2(t-t^*)})}{2-e^{-2t^*}} & t \in [0, T-\frac{1}{2}) \\ \frac{x_0 e^{2t^*}}{2-e^{-2t^*}} & t \in (T-\frac{1}{2}, T] \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{2x_0(e^{2t}-1)+\frac{1}{2}x_0 e^{-2t^*}(1-e^{4t})}{2-e^{-2t^*}} & t \in [0, T-\frac{1}{2}) \\ \frac{x_0 e^{2t^*}(\frac{3}{2}-2(t-t^*))+\frac{1}{2}x_0 e^{-2t^*}-2x_0}{2-e^{-2t^*}} & t \in (T-\frac{1}{2}, T] \end{cases}$$

$$p_x(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2-e^{-2T+1}}{8x_0}} e^{T-\frac{1}{2}+t} & t \in [0, T-\frac{1}{2}) \\ \sqrt{\frac{2-e^{-2T+1}}{2x_0}}(T-t)e^{-T+\frac{1}{2}} & t \in (T-\frac{1}{2}, T] \end{cases}$$

$$p_y(t) = 0, \quad t \in [0, T]$$

$$t^* = T - \frac{1}{2}, \qquad T \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2(x_0-\bar{y}) + \sqrt{4(x_0-\bar{y})^2 - 5(x_0+2\bar{y})}}{5}\right)\right]$$

Tilfelle (IV)

$y(t)$ er kontinuerlig og strengt voksende i hele intervallet $(0, T]$. Med en tidshorisont $T > 1/2 + 1/2 \ln\left((2(x_0 - \bar{y}) + \sqrt{4(x_0 - \bar{y})^2 - 5(x_0 + 2\bar{y})})/5\right)$, krysser $y(t)$ grensen $\bar{y}$ i intervallet en gang. Vi skal her bare se på det tilfellet at $\bar{y} < 2(T-1)x_0$.

Diskontinuitet vil forekomme i den adjungerte funksjonen $p_y(t)$.

Når T er stor blir t^* også stor, og det fører til at t^* forflytter seg til "høyre" med T. I dette tilfelle vil det være interresant å undersøke der $y(t)$ krysser grensen $\bar{y}$ i $t = \tau$ over intervallet $(0, t^*)$.

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{4p_x^2 2x} & t \in [0,\tau) \\ \frac{1}{4p_x^2 x} & t \in [\tau, t^*) \\ 1 & t \in (t^*, T] \end{cases} \qquad \alpha(t) = \begin{cases} 2 & t \in [0,\tau) \\ 1 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$p_x(t) = \begin{cases} A_1 e^{-2t} - B & t \in [0,\tau) \\ A_2 e^{-t} & t \in [\tau, t^*) \\ (T-t)\frac{1}{2\sqrt{x_T}} & t \in (t^*, T] \end{cases} \qquad p_y(t) = \begin{cases} B & t \in [0,\tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{cases} 2x(1-u) & t \in [0,\tau \\ x(1-u) & t \in [\tau, t^*) \\ 0 & t \in (t^*, T] \end{cases}, \qquad \dot{y} = \begin{cases} 2x & t \in [0,\tau) \\ x & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$u(t) = \frac{1}{4(A_1 e^{-2t} - B)^2 2x}$$
$$\dot{x} = 2x\left(1 - \frac{1}{4(A_1 e^{-2t} - B)^2 2x}\right), \quad \dot{x} = 2x - \frac{1}{4(A_1 e^{-2t} - B)^2}$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{2t}\Big(C_1 - \frac{1}{4}\int \frac{e^{-2t}}{(A_1e^{-2t}-B)^2}dt\Big) & u &= A_1e^{-2t}-B \\
&= e^{2t}\Big(C_1 + \frac{1}{8A_1}\int \frac{1}{u^2}du\Big) & du &= -2A_1e^{-2t}dt \\
&= e^{2t}\Big(C_1 + \frac{1}{8A_1}(-\frac{1}{u}\Big) \\
&= e^{2t}\Big(C_1 - \frac{1}{8A_1}\frac{1}{A_1e^{-2t}-B}\Big) \\
&= C_1e^{2t} - \frac{e^{4t}}{8A_1(A_1-Be^{2t})}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x(t) = x_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 - \frac{1}{8A_1(A_1-B)} = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = x_0 + \frac{1}{8A_1(A_1-B)} \\
&x(t) = (x_0 + \frac{1}{8A_1(A_1-B)})e^{2t} - \frac{e^{4t}}{8A_1(A_1-Be^{2t})} \quad , \quad t \in [0,\tau)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_x(t) &= A_2e^{-t} \\
p(t^*) &= \frac{1}{2\sqrt{x_T}} \quad \Rightarrow \quad A_2e^{-t^*} = \frac{1}{2\sqrt{x_T}} \quad \Leftrightarrow \quad A_2 = \frac{e^{t^*}}{2\sqrt{x_T}} \\
p_x(t) &= \frac{e^{t^*-t}}{2\sqrt{x_T}} \quad , \quad t \in [\tau, t^*)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_x(\tau_-) &= p_x(\tau_+) \\
A_1e^{-2\tau} - B &= \frac{e^{t^*-\tau}}{2\sqrt{x_T}} \quad \Leftrightarrow \quad A_1 = \frac{e^{t^*+\tau}}{2\sqrt{x_T}} + Be^{2\tau}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{4\big(\frac{e^{t^*-t}}{2\sqrt{x_T}}\big)^2x} = \frac{x_T}{x(t)}e^{-2(t^*-t)} \\
\dot{x} &= x(t)(1 - \frac{x_T}{x(t)}e^{-2(t^*-t)}) \ , \ \dot{x} \qquad = x(t) - x_Te^{-2(t^*-t)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^t\left(C_2 - x_T e^{-2t^*}\int e^{-t}e^{2t}dt\right) \\
&= e^t\left(C_2 - x_T e^{-2t^*}e^t\right) = C_2e^t - x_T e^{2(t-t^*)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x(\tau_-) &= x(\tau_+) \\
C_2e^{\tau} - x_T e^{2(\tau-t^*)} &= \left(x_0 + \frac{1}{8A_1(A_1-B)}\right)e^{2\tau} - \frac{e^{4\tau}}{8A_1(A_1-Be^{2\tau})} \\
C_2 &= \left(x_0 + \frac{1}{8A_1(A_1-B)}\right)e^{\tau} - \frac{e^{3\tau}}{8A_1(A_1-Be^{2\tau})} \\
&\quad + x_T e^{\tau-2t^*} \\
x(t) &= \left(x_0 + \frac{1}{8A_1(A_1-B)}\right)e^{\tau+t} - \frac{e^{3\tau+t}}{8A_1(A_1-Be^{2\tau})} \\
&\quad + x_T e^{\tau+t-2t^*} - x_T e^{2(t-t^*)} \\
&= \frac{8x_0(A_1-B)(A_1-Be^{2\tau})e^{\tau+t} - (e^{2\tau}-1)e^{\tau+t}}{8(A_1-B)(A-Be^{2\tau})} \\
&\quad + x_T(e^{\tau+t} - e^{2t})e^{-2t^*} \quad , \quad t \in [\tau, t^*)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x(t^*) &= x_T \\
x_T &= \frac{8x_0(A_1-B)(A_1-Be^{2\tau})e^{\tau+t^*} - (e^{2\tau}-1)e^{\tau+t^*}}{8(A_1-B)(A_1-Be^{2\tau})} + x_T(e^{\tau-t^*}-1) \\
x_T &= \frac{(8x_0(A_1-B)(A_1-Be^{2\tau}) - (e^{2\tau}-1))e^{\tau+t^*}}{8(A_1-B)(A_1-Be^{2\tau})(2-e^{\tau-t^*})}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{8x_0(A_1-B)(A_1-Be^{2\tau})e^{\tau+t^*}(2-e^{\tau-t^*})}{8(A_1-B)(A_1-Be^{2\tau})(2-e^{\tau-t^*})} \\
&\quad + \frac{(8x_0(A_1-B)(A_1-Be^{2\tau)} - (e^{2\tau}-1))(e^{2\tau+t-t^*} - e^{\tau+2t-t^*})}{8(A_1-B)(A_1-Be^{2\tau})(2-e^{\tau-t^*})} \quad , \quad t \in [\tau, t^*)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= 2\int\Big((x_0 + \frac{1}{8A_1(A_1-B)})e^{2t} - \frac{e^{4t}}{8A_1(A_1-Be^{2t})}\Big)dt \\
y(t) &= (x_0 + \frac{1}{8A_1(A_1-B)})e^{2t} - \frac{1}{4A_1}\int\frac{e^{4t}}{(A_1-Be^{2t})}dt \\
y(t) &= (x_0 + \frac{1}{8A_1(A_1-B)})e^{2t} - \frac{1}{4A_1B^2}\big(A_1\ln|A_1-Be^{2t}| - (A_1-B)\big) + D_1 \\
y(t) &= 0 \\
&\Rightarrow\ -\big(x_0 + \frac{1}{8A_1(A_1-B)}\big) - \frac{1}{4A_1B^2}\big(A_1\ln|A_1-B| - (A_1-B)\big) = D_1 \\
&= \frac{8x_0B(A_1-B)+1}{8B(A_1-B)}(e^{2t}-1) + \frac{1}{8B^2}\ln|\frac{A_1-Be^{2\tau}}{A_1-B}|\ ,\ t\in[0,\tau)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p_x(t^*_-) = p_x(t^*_+) \\
&\frac{e^{2(t^*-t)}}{2\sqrt{2x_T}} = (T-t^*)\frac{1}{2x} \quad\Leftrightarrow\quad 1 = T-t^* \quad\Leftrightarrow\quad t^* = T-1
\end{aligned}
$$

Bruker diskontuitetsbetingelsene for å finne B, med skranken definert som $\phi(t,x(t)) = y(t)-\bar{y}$, ((NT) betingelsen er oppfylt).

$$
\begin{aligned}
&[\phi_t(\tau,x^*(\tau-)) + \phi_x(\tau,x^*(\tau-))f(\tau,x^*(\tau-),u^*(\tau-))]\mu_i \\
&+\phi_x(\tau,x^*(\tau-)) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\left[0 + \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2x_0e^{2\tau} + \frac{2e^{2\tau}}{8A_1(A_1-B)} + \frac{Be^{2\tau}-4A_1}{8A_1(A_1e^{-2\tau}-B)^2} \\ \frac{8x_0(A_1-B)(A-Be^{2\tau})e^{2\tau}+(2-e^{2\tau})e^{2\tau}}{8x_0(A_1-B)(A-Be^{2\tau})}\end{bmatrix}\right]\mu_1 + 0 = 0
$$

$$
\mu_1 = 0
$$

$$
\left[0 + \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2x_0e^{2\tau} + \frac{2e^{2\tau}}{8A_1(A_1-B)} + \frac{Be^{2\tau}-4A_1}{8A_1(A_1e^{-2\tau}-B)^2} \\ \frac{8x_0(A_1-B)(A-Be^{2\tau})e^{2\tau}+(2-e^{2\tau})e^{2\tau}}{8x_0(A_1-B)(A-Be^{2\tau})}\end{bmatrix}\right]\mu_2 + 1 = 0
$$

$$
\mu_2 = -\frac{8x_0(A_1-B)(A-Be^{2\tau})}{8x_0(A_1-B)(A-Be^{2\tau})e^{2\tau} + (2-e^{2\tau})e^{2\tau}}
$$

$$
\begin{aligned}
p(\tau-) - p(\tau+) = {} & p_0[f_0(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-)) - f_0(\tau, x^*(\tau+), u^*(\tau+))]\boldsymbol{\mu} \\
& +[p(\tau+)f(\tau, x^*(\tau-), u^*(\tau-)) - p(\tau+)f(\tau, x^*(\tau+), u^*(\tau+))]\boldsymbol{\mu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} A_1 e^{-2\tau} - B \\ B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{e^{2(t^*-\tau)}}{2\sqrt{x_T}} \\ 0 \end{bmatrix} \\
= {} & 1\Big(\frac{1}{2(A_1 e^{-2\tau} - B)} - \sqrt{x_T} e^{\tau - t^*}\Big) \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{8x_0(A_1-B)(A-Be^{2\tau})}{8x_0(A_1-B)(A-Be^{2\tau})e^{2\tau}+(2-e^{2\tau})e^{2\tau}} \end{bmatrix} \\
& + \Bigg[[\frac{e^{t^*-\tau}}{2\sqrt{x_T}} \quad 0] \begin{bmatrix} 2x_0 e^{2\tau} + \frac{2e^{2\tau}}{8A_1(A_1-B)} + \frac{Be^{2\tau}-4A_1}{8A_1(A_1e^{-2\tau}-B)^2} \\ \frac{8x_0(A_1-B)(A-Be^{2\tau})e^{2\tau}+(2-e^{2\tau})e^{2\tau}}{8x_0(A_1-B)(A-Be^{2\tau})} \end{bmatrix} \\
& -[\frac{e^{2(t^*-\tau)}}{2\sqrt{x_T}} \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{8x_0(A_1-B)(A-Be^{2\tau})e^{2\tau}+(1-e^{2\tau})e^{2\tau}}{8(A_1-B)(A-Be^{2\tau})} - x_T e^{2(\tau-t^*)} \\ 0 \end{bmatrix} \Bigg] \\
& * \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{8x_0(A_1-B)(A-Be^{2\tau})}{8x_0(A_1-B)(A-Be^{2\tau})e^{2\tau}+(2-e^{2\tau})e^{2\tau}} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad A_1 e^{-2\tau} - B = \frac{e^{2(t^*-\tau)}}{2\sqrt{2x_T}}
$$

$$
\Rightarrow \quad B = -A_1 e^{-2\tau}
$$

$$
A_1 = \frac{e^{t^*+\tau}}{4\sqrt{2x_T}} \quad \Leftrightarrow \quad A_1\sqrt{x_T} = \frac{1}{4}e^{t^*+\tau}
$$

$$A_1\left(\frac{(8x_0(A_1-B)(A-Be^{2\tau})+(1-e^{2\tau}))e^{\tau+t^*}}{8(A_1-B)(A-Be^{2\tau})(2-e^{\tau-t^*})}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}e^{t^*-\tau}$$

$$\left(\frac{(16x_0A_1^4(1+e^{-2\tau})+A_1^2(1-e^{2\tau})e^{\tau+t^*}}{16A_1^2(1+e^{-2\tau})(2-e^{\tau-t^*})}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}e^{t^*-\tau}$$

$$\frac{(16x_0A_1^2(1+e^{-2\tau})+(1-e^{2\tau})e^{\tau+t^*}}{16(1+e^{-2\tau})(2-e^{\tau-t^*})}=\frac{1}{16}e^{2(t^*-\tau)}$$

$$(16x_0A_1^2(1+e^{-2\tau})+(1-e^{2\tau}))e^{\tau+t^*}=e^{2(t^*-\tau)}(1+e^{-2\tau})(2-e^{\tau-t^*})$$

$$A_1=\pm\left(\frac{e^{2(t^*-\tau)}(1+e^{-2\tau})(2-e^{\tau-t^*})-(1-e^{2\tau})e^{\tau+t^*}}{16x_0(1+e^{-2\tau})}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$A_1=\left(\frac{e^{2(t^*-\tau)}(1+e^{-2\tau})(2-e^{\tau-t^*})-(e^{2\tau}-1)e^{\tau+t^*}}{16x_0(1+e^{-2\tau})}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow\ B=-\left(\frac{e^{2(t^*-\tau)}(1+e^{-2\tau})(2-e^{\tau-t^*})-(e^{2\tau}-1)e^{\tau+t^*}}{16x_0(1+e^{-2\tau})}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-2\tau}$$

Siden vi har at $\bar{y} < 2(T-1)x_0$ og vet at $y(t)$ er strengt voksende i $(0,T)(y(t)=2\int xdt \geq 2\int x_0dt)$, $\Rightarrow$ $\bar{y} < 2(T-1)x_0 < 2(T-1)y(t)$. Dette betyr at $y(\tau)=\bar{y}$ vil inntreffe i $t\in[0,T-1)$.

$$y(\tau)=\bar{y}$$

$$\frac{8x_0B(A_1-B)+1}{8B(A_1-B)}(e^{2t}-1)+\frac{1}{8B^2}\ln|\frac{A_1-Be^{2\tau}}{A_1-B}|=\bar{y}$$

$$\frac{8x_0A_1^2(1+e^{-2\tau})+1}{8A_1^2(1+e^{-2\tau})}(e^{2t}-1)+\frac{1}{8A_1^2e^{-4\tau}}\ln|\frac{2}{1+e^{-2\tau}}|=\bar{y}$$

Å finne et bestemt uttrykk for τ er ikke mulig analytisk, (her må vi bruke numeriske metoder for å finne et tall for τ).

En mulig løsning på problemet med $y(t) > \bar{y}$ og $\tau \in [0, t^*)$, der alle løsningene er bestemt av A_1 og τ (A_1 er igjen bestemt av τ) er gitt ved:

$$\alpha(t) = \begin{cases} 2 & t \in [0, \tau) \\ 1 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} \frac{(1+e^{-2\tau})(1+e^{2(t-\tau)})}{(e^{-2t}+e^{-2\tau})\left((8A_1^2x_0(1+e^{-2\tau})(1+e^{2(t-\tau)})e^{2t}+(1+e^{2(t-\tau)})e^{2t}-(1+e^{2\tau})e^{4t}\right)} & t \in [0, \tau) \\ \frac{(16A_1^2x_0(1+e^{-2\tau})-(e^{2\tau}-1))e^{2t}}{16A_1^2x_0(1+e^{-2\tau})(2-e^{\tau-t^*})e^{2t^*}+2e^{\tau+t}+e^{2(\tau+t)}-2e^{2t}-e^{3\tau+t}} & t \in [\tau, t^*) \\ 1 & t \in (t^*, T] \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{(8A_1^2x_0(1+e^{-2\tau})(1+e^{2(t-\tau)})+(1+e^{2(t-\tau)})-(1+e^{-2\tau})e^{2t})e^{2t}}{8A_1^2(1+e^{-2\tau})(1+e^{2(t-\tau)})} & t \in [0, \tau) \\ \frac{(16A_1^2x_0(1+e^{-2\tau})-(e^{2\tau}-1))e^{\tau+t}}{16A_1^2(1+e^{-2\tau})} & \\ +\frac{16A_1^2x_0(1+e^{-2\tau})-(e^{2\tau}-1)}{16A_1^2(1+e^{-2\tau})(2-e^{\tau-t^*})}(e^{\tau+t} - e^{2t})e^{\tau-t^*} & t \in [\tau, t^*) \\ \frac{(16A_1^2x_0(1+e^{-2\tau})-(e^{2\tau}-1))e^{\tau+t^*}}{16A_1^2(1+e^{-2\tau})(2-e^{\tau-t^*})} & t \in (t^*, T] \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{16A_1^2x_0e^{-2\tau}-1}{16A_1^2e^{-2\tau}}(e^{2t} - 1) + \frac{1}{8A_1^2e^{-4\tau}}\ln\left|\frac{2}{1+e^{-2\tau}}\right| & t \in [0, \tau) \\ y(t) \in [\bar{y}, Tx_T] & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$p_x(t) = \begin{cases} \left(\frac{e^{2(t^*-\tau)}(1+e^{-2\tau})(2-e^{\tau-t^*})-(e^{2\tau}-1)e^{\tau+t^*}}{16x_0(1+e^{-2\tau})}\right)^{\frac{1}{2}}(e^{-2t} + e^{-2\tau}) & t \in [0, \tau) \\ \frac{e^{T-1-t}}{2\left(\frac{(16A_1^2x_0(1+e^{-2\tau})-(e^{2\tau}-1))e^{\tau+t^*}}{16A_1^2(1+e^{-2\tau})(2-e^{\tau-t^*})}\right)^{\frac{1}{2}}} & t \in [\tau, t^*) \\ \frac{T-t}{2\left(\frac{(16A_1^2x_0(1+e^{-2\tau})-(e^{2\tau}-1))e^{\tau+t^*}}{16A_1^2(1+e^{-2\tau})(2-e^{\tau-t^*})}\right)^{\frac{1}{2}}} & t \in (t^*, T] \end{cases}$$

$$p_y(t) = \begin{cases} -\left(\frac{e^{2(t^*-\tau)}(1+e^{-2\tau})(2-e^{\tau-t^*})-(e^{2\tau}-1)e^{\tau+t^*}}{16x_0(1+e^{-2\tau})}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-2\tau} & t \in [0, \tau) \\ 0 & t \in [\tau, T] \end{cases}$$

$$t^* = T - 1 \qquad T > \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2(x_0 - \bar{y}) + \sqrt{4(x_0 - \bar{y})^2 - 5(x_0 + 2\bar{y})}}{5}\right)$$

5.2 Optimal løsning

Betingelsene for kontrollregionen ($U = [0,1]$) og for alle tillatte $x(t)$, $x_0 \leq x(t) \leq x_T$, (og dermed også for $y(t)$) er tilfredsstilt. Siden $f_{0_\phi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ er konkav og $\mathbf{f}_\phi(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ er lineær, er konveksitetsbetingelsen også oppfylt. Med $\alpha x(t)$ voksende og positiv i $[0, T]$ og $y(t) = \alpha x(t)t$ er funksjonen strengt voksende i $(0, T]$ og dermed krysser den grensen slik (NT)-betingelsen krever. Siden betingelsene ovenfor er oppfylt sikrer eksistensteoremet at det finnes en optimal løsning. For gitt tidshorisont har vi bare ett forslag og kan dermed konkludere med at løsningene er optimale.

Endringsdynamikk

Tilsvarende som foregående modell får den adjungerte funksjonen $p_y(t)$ i tilfellet (IV) i denne modellen et sprang i krysningspunktet og medfølger en negativ endring i systemet. Som det vises ovenfor er A_1 positiv og siden $p_y(t) = B = -A_1 e^{-2\tau}$ er $p_y(t)$ negativ. Siden $p_x(t)$ også er bestemt av $p_y(t)$ påfører spranget en sprangeffekt på $p_x(t)$ slik at den senkes mot t-aksen. Ser vi partielt på kontrollfunksjonen $u(t)$ med hensyn på $p_x(t)$, medfører spranget at $u(t)$ - banen presses oppover mot endepunktet 1 (konsumet øker pga økende kostnader). Dermed er $u(t)$ diskontinuerlige på det tidspunktet. For $x(t)$ vil dette bety at den får en lavere vekshastighet (en dempende effekt).

En økonomisk tolkning av analysen

Den optimale investingsallokeringen for bedriften starter med et forløp med høy investering, men er avtagende mot t^*. Siden vendepunktet (t^*) er bestemt av endetidspunktet T, vil investeringsallokeringene avhenge av bedriftens tidshorisont. Med stor T, flytter t^* til "høyre" og gir bedriften et lengre investeringsforløp. I tilfelle (II) med en kort tidshorisont $(T < 1/2)$ vises bedriftens optimale strategi som er å konsumere alt. En større tidshorisont $(T > 1/2)$, men før vi inntreffer krysningspunktet, får vi et optimalt investeringsforløp $[0, t^*)$, og deretter lar hele fortjenesten gå til konsum i endeperioden $(t^*, T]$. Dette analyserer jeg i tilfelle (III). For tidshorisonten $T > 1/2 + 1/2 \ln 2(x_0 - \bar{y}) + \sqrt{4(x_0 - \bar{y})^2 - 5(x_0 + \bar{y})}/5$ krysses grensen. I tilfelle (IV) viser jeg optimal investeringsforløp der sprangstidspunktet inngår i dette forløpet, men inntil t^*. Analysen viser å være i samsvar med økonomisk vekstteori, i generelle tilfeller, med høy investering i startenperioden og lav investering i sluttperioden.

6 Konklusjon

I denne oppgaven har jeg presentert tre økonomiske modeller som rammes av diskontinuitet under planperioden. Jeg har analysert modellene for konsekvenser av endringer i systemene etter at de har krysset en grense for differensiallikninger og integrander i kriteriene. Formålet med presentasjonen av modellene har vært å finne optimale kontrollfunksjoner som maksimerer kriteriet med systemer som endrer karakter for overskridelse av en grense. Jeg har brukt en løsningsmetode som er publisert i et memorandum av Atle Seierstad og Sigve D. Stabrun, *Discontinous control systems*. Denne metoden bruker standard maksimumsprinsipp tilføyet noen tilleggsbetingelser (diskontinuitetsbetingelser), for diskontinuerlige kontrollproblemer. I løsningsforslagene følger det løsninger for optimale kontroller før sprangtidspunktet (kontinuerlig tilfelle) og etter sprangtidspunktet (diskontinuerlig tilfelle).

Noen konsekvenser av diskontinuitet i differensiallikingene og i integrander i kriteriene i kommer klart fram i oppgaven:

Etter å ha krysset grensen for differensiallikninger og integrander i kriteriene endret systemene karakter. På krysningspunktet fikk den adjungerte funksjonen (tilordnet differensiallikningen til tilstandsvariabelen i ϕ -funksjonen) et sprang. Diskontinuitet i den adjungerte funksjonen medførte også at kontrollfunksjonene i kontrollproblemene i model 1 og 3 ble diskontinuerlige på sprangtidspunktet. Dette medfører at de optimale banene blir presset nedover og oppover i de respektive problemene.

Den matematiske analysen viser at løsningene er langt mer omfattende ved diskontinuerlige tilfeller. Spesielt var det utfordrende i kontrollproblemet hvor Hamilton-funksjonen er konkav i x og u. Her får vi ikke nødvendigvis løst kontrollproblemet analytisk og må bruke numeriske metoder for å løse dette. Dette ble belyst i forsøket med å løse kontrollproblemet i modell 3 (tilfelle (IV), der problemet oppstod å finne løsningen for τ. (På grunn av stramt tidsbudsjett hadde jeg dessverre ikke mulighet til å finne en numerisk løsning av dette problemet). Dette gjorde at noen av kontrollproblemene ble mer krevende å analysere og løsningene ble svært omfattende. På grunn av dette var det utfordrende å finne den økonomiske tolkningen.

7 Kildeliste

Seierstad, A. og K. Sydsæter (1987): Optimal Control Theory with Economic Applications. North-Holland, Amsterdam.

Sydsæter, K., A. Seierstad og A. Strøm (2002): Matematisk analyse, bind 2. Gyldendal Akademisk, Oslo.

Seierstad, A. og S. Stabrun (2007): "Discontinous control systems". Memorandum, Økonomisk institutt ved Universitetet i Oslo.

Stabrun, S. D. (2007): "Optimal kontroll i diskontinuerlige problemer". Masteroppgave, Økonomisk institutt ved Universitetet i Oslo.

Gerlagh, R. og M. Liski (2007): "Strategic Oil Dependence". Discussion Papir No 165, Helsinki Center of Economic Research, Discussion Papers.